GOTTLOB FREGE

Fundamentele aritmeticii

O CERCETARE LOGICO-MATEMATICĂ ASUPRA CONCEPTULUI DE NUMĂR



HUMANITAS

GOTTLOB FREGE (1848–1925). Matematician şi logician german, fondatorul logicii matematice moderne, a fost profesor de matematică la Jena şi a exercitat o influenţă puternică asupra marilor filozofi de la începutul secolului XX, precum Husserl, Russell şi Wittgenstein.

OPERE:

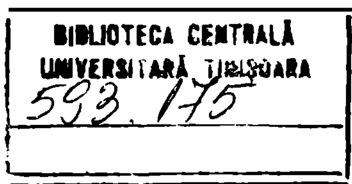
Begriffsschrift (1879)
Die Grundlagen der Arithmetik (1884)
Grundgesetze der Arithmetik (două volume: 1893 şi 1903)

GOTTLOB FREGE

Fundamentele aritmeticii

O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr

Traducere din germană, cuvînt înainte, note
și tabel cronologic de
SORIN VIERU







HUMANITAS
BUCUREȘTI

Coperta
IOANA DRAGOMIRESCU MARDARE

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
FREGE, GOTTLOB
Fundamentele aritmeticii: o cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr / Gottlob Frege. Bucureşti: Humanitas, 2000
272 p.; 16,5 cm
Tit. orig. (ger): Die Grundlagen der Arithmetik.
ISBN 973-28-0641-9

510.6

ISBN 973-28-0641-9

CUVÎNT ÎNAINTE

Prin această carte[1], de proporții modeste dar de încărcătură densă, logica își mărturisește o nouă vocație: aceea de a funda matematicile, lămurind prin intermediul unor definiții riguroase conceptele primitive ale aritmeticii. Aportul ei urma acum să stea nu doar în *metodă*, ci în însuși *conținutul* infuzat matematicilor. Căci acesta este logicismul: un program menit să asigure fundamente ferme dar nu autonome unei științe care s-a putut mîndri întotdeauna cu certitudinea absolută a rezultatelor și relativa rigoare a metodelor, însă nu a putut da seama pînă la capăt de propriile-i fundamente. Numerele sprijină edificiul aritmeticii, și pînă la urmă — activitatea reducționistă a matematicienilor ajunsese să dovedească acest punct delicat — sprijină întreaga disciplină. Căci pînă și figura și mișcarea, timpul adică și spațiul, sînt reductibile la număr, prin aritmetizarea analizei și algebrizarea geometriei. Ce sînt însă chiar numerele întregi, acești Atlanți pe care se sprijină cosmosul matematic? În a doua jumătate a secolului XIX, întrebarea devenea tot mai presantă. Într-adevăr, fusese întrevăzută deja calea prin care numerele complexe își găsesc interpretarea lor în planul geometric, reducîndu-se într-un fel la numărul real (Gauss); numărul real se poate construi din șiruri, sau din mulțimi de numere raționale (Weierstrass, Dedekind, Cantor); numărul rațional și numărul negativ

se reduc și ele — prin raportare — la numărul întreg. Geometria însăşi nu mai părea o lume autonomă; dacă intuiția spațială este un dat ireductibil (Kant), limbajul geometriei este în schimb traductibil în acela al algebrei mărimilor (Descartes), ba chiar al algebrei abstracte a structurilor (Klein, Programul de la Erlangen). Grație racordului făcut, fundarea geometriei şi analizei ajunge să depindă într-un mod evident de fundarea aritmeticii.

În cartea sa, Frege afirmă: rigoarea demonstrațiilor nu este suficientă spre a funda aritmetica, fără a mai vorbi de faptul că însăşi această rigoare matematică nu a fost atinsă. Un sfert de secol mai tîrziu, atunci cînd idealul rigorii demonstrative va fi asociat intim demersului formal-axiomatic, Frege va accentua că însăşi axiomatizarea, sprijinită pe logica matematică, nu asigură fundamentele unei discipline cum este geometria; se mai cere evidenţa adevărurilor prime, clara şi distincta percepere a ideilor primare, inteligibilitatea nepusă în paranteze a conţinuturilor. Frege nu l-a înţeles pe Hilbert, implicit deci nu priveşte matematica în termeni de structuri şi modele. Şi totuşi, nici un adversar al acestei din urmă viziuni nu va fi contribuit mai mult la implantarea ei în viaţă prin asumarea unor obiective şi făurirea unor instrumente perfecţionate. Aşa cum în viaţa socială o tehnologie nouă poate să apară într-un cadru inadecvat de relaţii şi instituţii, determinînd pînă la urmă înlocuirea lui, tot astfel proiectul logicist imaginat de Frege s-a putut autodizolva în ansamblul demersurilor fundaţioniste, găsindu-şi validarea în călătoria spre ţel şi nu în atingerea scopului ultim, în tehnologia intrinsecă şi nu în folosinţa în imediat. Cu alte cuvinte, ca de atîtea ori, relaţia dintre scop şi mijloace se inversează.

În ce constă însă, mai exact, acest proiect logicist, aşa cum îl găsim încorporat în *Fundamentele aritmeticii*? Şi

în ce măsură călătoria lui Frege către o țintă — cum s-a dovedit — iluzorie constituie un episod semnificativ în istoria rațiunii?

Lucrurile se întîmplă în deceniul în care în mintea genială a lui Cantor gestează teoria mulțimilor, aritmetica numerelor infinite și definiția numărului cardinal, iar Dedekind pregătește și el o explicație asupra numărului ordinal și a numărului cardinal (*Was sind und was sollen die Zahlen?* apare în 1887), pornind de la ceea ce astăzi numim mulțimi și corespondențe sau aplicații biunivoce; către sfîrșitul aceluiași deceniu Peano va formula sistemul de axiome ale aritmeticii; axiomele aritmeticii, de altfel, inclusiv principiul inducției matematice, se găsesc deja la Dedekind. Axiomatizarea aritmeticii dar, mai presus, analiza logică a ideilor fundamentale ale aritmeticii, reducerea lor la idei încă mai elementare pluteau așadar în aer. De asemenea, nu puțini erau matematicienii care meditau asupra numărului și mulțimii, chiar dacă nu la acest nivel de vîrf. Așadar, cartea lui Frege apare într-un moment în care sensul general al demersului — reducerea numărului *via* definiții la concepte mai elementare — prindea contururi.

Va trebui totuși să treacă multă vreme pînă cînd încercările solitare să se găsească unele pe altele și să-și recunoască fondul comun. Marele învins al acestei perioade este Frege; validarea lui va veni tîrziu și în etape. Deocamdată, la data apariției, cartea trece puțin observată. Într-o recenzie, Cantor găsea justă orientarea filozofică generală a cărții, pertinente observațiile critice de natură filozofică, dar se cantona în observații minore, neesențiale asupra deosebirii dintre ceea ce el numește *Mächtigkeit* și ceea ce este pentru Frege numărul cardinal, *Anzahl*; Cantor sfîrșea prin a contesta valabilitatea definiției fregeene a numărului: se pare că întemeietorul teoriei mulțimilor nu a înțe-

les sensul definiției lui Frege și — ceea ce este mai frapant! — nu a întrevăzut echivalența definiției sugerate de Frege cu propria sa definiție. La fel, a doua reacție deconcertantă în epocă, la cartea lui Frege, este aceea a lui Husserl: în *Philosophie der Arithmetik*, Bd. I (1891), tînărul filozof găsește că *Fundamentele aritmeticii* sînt rodul unei subtilități exersate în gol, distincțiile fregeene fiind penetrante, însă nesemnificative. Ca și în cazul lui Cantor, observațiile critice vădesc neînțelegere și Frege a putut răspunde criticilor săi cu argumente solide. În rest, se mai poate consemna doar reacția lui Benno Kerry; reluînd problema distincției obiect–concept, acesta i-a dat astfel lui Frege prilejul de a dezvolta în „Über Begriff und Gegenstand" cîteva aspecte dificile ale teoriei sale logico-filozofice.

Noutatea radicală întîmpină prea des rezistență; memoriile matematice ale lui Georg Cantor reprezintă una dintre cele mai dramatice ilustrări ale destinului geniului. Neînțelegerea contemporanilor față de Prometeii cunoașterii este acel vultur din mit care devorează zi de zi pe eroul înlănțuit. În limbajul unui mit mai realist al zilelor noastre ar trebui să vorbim — cu un alt cuvînt elin — despre *paradigme*: Cantor și Frege luptau pentru afirmarea unor paradigme noi, întru totul străine modului primit, educat, de a vedea lucrurile, inerent majorității zdrobitoare a membrilor unei comunități științifice.

Dar dacă un Plutarh modern ar scrie cumva *Viețile paralele și interferate ale oamenilor iluștri din științe și arte*, afinitățile și contrastele dintre Cantor și Frege, dintre oameni și opere i-ar putea oferi prilejul unor dezvoltări retorice. Iată, de pildă, dacă comparăm primirea contemporanilor: Cantor stîrnește adversități, suspiciuni, patimi, aderențe și refuzuri nete, totuși nu se poate spune că lumea matematică manifestă indiferență față de mesajul său; Frege rămîne însă un solitar.

Cu *Fundamentele aritmeticii* s-a petrecut tot ce poate fi mai rău: la apariție, cartea lui Frege este înconjurată de o masivă indiferență, de o neînțelegere fără relief. Frege se temea — și lucrurile se vor repeta zece ani mai tîrziu cînd dă la iveală primul volum al *Legilor fundamentale ale aritmeticii* — tocmai de această indiferență. Cînd meditām asupra cauzelor opacității manifestate înăuntrul unei culturi în care matematica, filozofia și logica erau cultivate ca nicăieri în altă parte, nu mai putem da vina pe simbolismul neobișnuit al *Scrierii conceptuale*; căci în 1884, la cinci ani după experiența negativă cu prima sa carte, Frege încearcă să găsească o audiență cît mai largă, renunțînd la un sistem de notații rebarbativ. El scrie adînc, limpede, sistematic, cu vii sclipiri polemice. Dar noutatea revoluționară este trecută cu vederea de publicul savant al vremii, puțin dispus să se cufunde în subtilitățile unui autor ciudat, care scrie nematematic dar și nespeculativ despre matematică. Cum să explicăm deci neînțelegerea? Răspunsul l-ar putea da doar un eseu care să treacă în revistă diferiții factori care intră în joc, personali, interpersonali și comunitari. Aici vom aminti mai întîi faptul că Frege se adresează în același timp matematicienilor, filozofilor și logicienilor; însă un mesaj adresat mai multor comunități intelectuale poate fi receptat, la început, numai la intersecția mulțimilor respective, adică într-un mediu extrem de restrîns. Audiența devine și mai restrînsă atunci cînd mesajul este nonconformist, violentează habitudinile intelectuale, paradigmele instaurate. Or, Frege luptă împotriva unor adversari influenți: logica psihologistă a vremii și „concepțiile naive despre număr". Nu numai atît: dacă Frege nu putea găsi înțelegere la un public educat în spiritul logicii tradiționale, el are dificultăți în a impune și în rîndurile adepților „Noii logici" reprezentate de algebra booleană noua paradigmă a logicii pre-

dicatelor și metoda analizei filozofice întemeiată pe această logică (metodă aplicată, de exemplu, în analiza conceptului de existență, în teoria descripțiilor și definiția numărului). Raționalismul filozofic impregnat de realism, neînregimentarea în una sau alta din direcțiile filozofice influente ale vremii, atacul împotriva confuziei naturaliste între psihologie și logică, profunzimea concepțiilor lui Frege — toate au contribuit la lipsa de succes în imediat a *Fundamentelor aritmeticii*, tot atît de mult ca și la asigurarea valorii perene.

Fundamentele aritmeticii au fost „descoperite" în zorii secolului nostru de către Bertrand Russell, adică tocmai de către un reprezentant prin excelență al acelui public interesat în același timp de filozofie, logică și matematică; definiția numărului, teoria descripțiilor, analiza logică în calitate de instrument al filozofiei au trebuit să treacă prin filtrul russellian spre a deveni apanajul unui cerc mai larg. Încă și astăzi nu puțini sînt cititorii — între ei, logicieni și filozofi de vază — care tind să atribuie lui Russell întrebări ce au fost puse pentru întîia oară de către Frege, soluții pe care profesorul de la Jena le-a preconizat înainte ca analistul englez să le fi dat o altă coloratură filozofică, o destinație, o dezvoltare și un context cu totul schimbat. Autorul teoriei tipurilor a văzut pe drept cuvînt în Frege un precursor și un inovator revoluționar în domeniul fundamentelor matematicii și al analizei logice. Nu vom merge atît de departe încît să afirmăm, cu o vorbă împrumutată de la și despre alții, că dezvoltările date de Russell sînt simple „note de subsol" la filozofia lui Frege; ne vom mărgini să afirmăm că o lectură a *Fundamentelor aritmeticii* este actul de dreptate al întoarcerii la sursă, cu efectul întineritor pe care îl are întotdeauna scăldarea la izvoarele gîndului. O întreagă direcție influentă a filozofiei de astăzi — reprezentată de Russell, în unele perioade ale evoluției sale, Wittgenstein

din *Tractatus*, Carnap şi Church *qua* logicişti ş.a. — porneşte de aici nu în prelungire liniară, ci în sinuoasă curgere. Suflul raţionalist, realist al cărţii aparţine unei epoci optimiste, care nu presimţea dificultăţile din fundamentele matematicii, frîngerile intelectuale şi dilemele filozofice. Şi totuşi, acest suflu filozofic izbuteşte să ajungă la noi, semn al energiei sale intrinseci, punînd în mişcare morile de vînt ale analizei filozofice şi convertindu-se în alte forme de energie intelectuală.

În *Notele* aferente textului fregean ne-am străduit să punem în lumină anumite detalii revelatoare ale filozofiei şi logicii lui Frege. Aici vom încerca unele observaţii şi date care pot structura lectura *Fundamentelor aritmeticii* după criterii esenţiale.

1. Definiţia logico-matematică a numărului întreg pozitiv este obiectivul central al cărţii. Partea a IV-a oferă şi fundamentează răspunsul: fiecare număr întreg (*Anzahl*) este un *obiect*, şi anume un *obiect al logicii*; fiecare număr este sfera unui concept definit la rîndul său pe baza unei relaţii între concepte. Orice număr luat în parte este sfera unui concept de forma „echinumeric cu conceptul F“, unde F rămîne a fi determinat, în continuare, pentru fiecare număr. Frege arată totodată că îl putem determina pe F în calitate de concept pur logic, definindu-l prin intermediul relaţiei de identitate, cuantorilor, negaţiei şi conectivelor propoziţionale. Astfel, numărul zero este sfera conceptului „echinumeric cu conceptul de a fi neidentic cu sine“, sferă care înglobează toate conceptele echinumerice cu conceptul de a fi neidentic cu sine însuşi. Dar conceptele sînt echinumerice atunci cînd obiectele din sferele lor pot fi puse în corespondenţă biunivocă, adică într-o relaţie definibilă ea însăşi în termeni logici. Aşadar, numărului zero îi aparţin ca elemente toate conceptele care pot fi puse în cores-

pondență biunivocă cu conceptul determinat prin expresia „x nu este identic cu x" (sau ceva analog), deci conceptele sub care nu cade nici un obiect. Numărul zero este atunci ceea ce au comun toate conceptele de sferă vidă: putem spune aceasta, dacă prin „ceea ce au comun" nu vom înțelege totuși un concept *stricto sensu*, ci un *obiect abstract*; ceva este recunoscut ca obiect dacă apare desemnat printr-o expresie care admite articolul hotărît și poate fi subiectul unei propoziții singulare, dar nu poate fi predicat. Mai departe Frege îl definește pe 1 pe baza numărului zero, ca fiind extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul «identic cu zero»", îl definește pe 2 ca fiind sfera conceptului „echinumeric cu conceptul «identic cu zero sau identic cu unul»" și arată cum, în general, o dată definit un număr *n* îl putem defini pe succesorul său. Dacă fiecare număr în parte este un obiect, ele toate cad sub conceptul general de număr, pe care Frege îl explică, definind apoi relația de succesiune în cadrul șirului numerelor naturale și demonstrînd logic unele proprietăți elementare ale șirului numerelor naturale și principiul inducției matematice. Operațiile aritmetice elementare (adunarea, înmulțirea și inversele lor) nu mai sînt definite, dar Frege avea sentimentul că reducerea întregii aritmetici la logică este pe calea cea bună, ea devenind prin intermediul definiției logico-matematice a numărului extrem de probabilă. Mai rămînea să se demonstreze pe cale pur logică teoremele aritmeticii, obiectiv căruia Frege i-a rezervat a treia sa carte, pregătită îndelung, *Grundgesetze der Arithmetik*.

Această privire din avion asupra definiției fregeene a numărului poate da călătorului neavizat impresia că în fața lui defilează priveliștile neobișnuit de austere ale unei planete străine. Impresia de insolit se poate șterge într-o oarecare măsură, străbătînd pas cu pas itinerarul fregean, familia-

rizîndu-ne cu detaliile și convingîndu-ne că drumul duce într-adevăr la țintă și nu în cine știe ce abisuri ale inconsistenței ori ininteligibilității. Dar întrebarea este dacă la capătul călătoriei — valoroasă, oricum, prin solicitările impuse, învingerea dificultăţilor fiind în sine o răsplată a efortului depus — ajungem să regăsim peisajul familiar al aritmeticii de toate zilele, să regăsim *die Kleinkinderzahlen* — cum obişnuia să spună Frege —, aşadar dacă ceea ce s-a definit sînt într-adevăr numerele întregi aşa cum credeam a le şti. Abia după aceea sîntem în măsură să ne întrebăm dacă definiţia numerelor a apropiat de realizare programul logicist al reducerii la logică a aritmeticii.

Lăsînd la o parte obiecţia de-a dreptul eronată după care definiţiile ar cuprinde o circularitate, întrucît, de exemplu, în definiţia numărului unu intervine expresia „există cel puţin un..." — o asemenea obiecţie vădeşte numai regretabila neînţelegere a logicii —, mai rămîne să ne raportăm la impresia genuină a oricărui cititor că definiţia numărului *n* este neaşteptată, corespunde prea puţin reprezentărilor şi aşteptărilor noastre, intuiţiilor noastre neprevenite, că este de o lungime disproporţionată, iar pentru un *n* moderat de mare definiţia *detaliată* a numărului se dovedeşte nemoderat de lungă, în cuprinsul ei intrînd, de exemplu, disjuncţia a *n* clauze propoziţionale şi alte operaţii. Obiecţia nu este totuşi atît de gravă pe cît pare la prima vedere. Putem răspunde, amintind că felul obişnuit de a înţelege numărul *n* ca ocupînd al $n+1$-lea loc în şirul numerelor naturale 0, 1, 2... *n*, sau ca generat prin adunarea succesivă de *n* ori a unei unităţi la numărul zero nu comportă mult mai puţini paşi; în ambele cazuri, simplităţii aparente a numărului îi ia locul o complexitate. Menirea *analizei* logice este tocmai să substituie simplităţii aparente a elementelor unui sistem cum este şirul numerelor naturale complexitatea

elementelor constitutive, asamblate în ordinea lor intrinsecă, să înlocuiască fiecare element prin tot atîtea microcosmuri perfect structurate şi asamblate înăuntrul sistemului regăsit ca macrocosm. Într-un cuvînt, analiza logică trebuie să ofere *un model*; acest obiectiv, indubitabil, a fost atins.

2. Răspunsul la obiecţia de mai sus conduce însă direct la alta, de o natură diferită. Dacă un apologet al demersului fregean ar afirma că matematicianul de la Jena a urmărit să dea prin analiză logico-matematică *un model* al sistemului numerelor naturale, i s-ar putea răspunde că afirmaţia sa caracterizează mai curînd rezultatul efectiv decît obiectivul scontat iniţial; este prea exact că Frege dă *un model* al sistemului numerelor naturale, prin intermediul definiţiilor sale, însă ceea ce urmărea el era nu *un model*, ci — ca să spunem aşa — *Modelul* însuşi, Modelul arhetipal şi unic, reducţia echivalentă cu Adevărul Absolut. Acest obiectiv nu poate fi socotit atins, de vreme ce dispunem astăzi de mai multe definiţii echivalente, însă diferite ale numerelor naturale, şi de vreme ce aceste definiţii sînt formulabile în limbajul teoriei mulţimilor, ca alternativă la logica de ordin superior de care făcea uz Frege. Astfel, rămînînd în sfera teoriei mulţimilor, una din definiţiile propuse îl defineşte pe 0 ca pe mulţimea vidă $\varnothing$, iar pe $n+1$ ca pe mulţimea care conţine ca unic element mulţimea n; o altă definiţie bine cunoscută îl defineşte pe zero ca mulţimea vidă, $0 =_{df} \varnothing$, iar pe $n+1$ ca pe mulţimea conţinînd ca elemente toate numerele pînă la n inclusiv. În mod mai general, dificultatea poate fi asociată de sistemul axiomelor Dedekind–Peano pentru aritmetica elementară: sistemul caracterizează o clasă întreagă de modele izomorfe cu şirul numerelor naturale, inclusiv modele non-standard. Ce *este* deci fiecare număr natural în parte nu a fost arătat prin axioma-

tizarea formală a aritmeticii decît parțial; în măsura în care sistemul numerelor naturale mai are proprietăți netriviale pe care nu le are vreun alt sistem de obiecte care satisface aceleași axiome, și în măsura în care asemenea proprietăți ar deriva din însăși natura elementelor componente, adică din presupusa natură intimă a numerelor naturale, se poate spune că nici caracterizarea axiomatică, nici definițiile lui Frege nu-și ating ținta. Unei asemenea întîmpinări grave nu i se poate răspunde cu dezinvoltura cu care am putut face față obiecției anterioare. Aici, într-adevăr, intrăm în zona întrebărilor de răspîntii.

Dificultatea gnoseologică de care ne ciocnim confruntînd definiția logico-matematică a numărului pe care o dă Frege cu tot ce a adus evoluția ulterioară se despică în două întrebări fundamentale.

Mai întîi, putem lega soarta reducției logiciste de aceea a sistemului Dedekind–Peano, observînd că Frege nu a făcut decît să analizeze mai departe termenii primitivi ai sistemului formal al aritmeticii și să releve complexitatea ascunsă a obiectelor din orice model al acestuia. În pofida aparențelor, Frege nu a împins — și cum ar fi putut? — analiza sa *formală* dincolo de punctul care ar permite caracterizarea modelului-standard al aritmeticii formale ca distinct de celelalte modele non-standard, în măsura în care demersul angajează axiomele și teoremele aritmeticii, adică adevărurile ei intrinseci. Desigur, el vorbește despre numere ca despre obiecte determinate avînd proprietăți bine definite, dar toate definițiile și teoremele sale poartă un caracter *formal*, dincolo de limita la care Frege credea și dorea să ajungă. Altfel spus, pentru Frege, caracterul *formal* este identificat cu natura *pur logică* a conținutului conceptual pus în joc, însă nicidecum cu posibilitatea *mai multor interpelări*. Aplicațiile sau exemplificările definițiilor și enunțurilor arit-

metice — *id est* logice — pot fi oricît de multe, credea Frege, însă nu în înțelesul că ar accepta varii interpretări, angajînd astfel conținuturi conceptuale distincte. Or, existența mai multor modele ale sistemului formal incomplet al aritmeticii ne împinge tocmai să ne întrebăm dacă numerele mai sînt caracterizabile și altfel decît prin axiomele aritmeticii; definițiile aferente nu împing această caracterizare mai departe, ele stabilesc o legătură între aritmetică și logică (sau teoria mulțimilor), dar nu ne permit să discriminăm între elementele modelului-standard și elementele celorlalte modele. Sau, pentru a nuanța, în măsura în care sînt epurate de orice element intuitiv, prin trecerea lor în limbajul formulelor, ele admit *eo ipso* traduceri felurite nesinonime dar perfect „echivalente".

În al doilea rînd, făcînd abstracție de limitele intrinseci ale reducției aritmeticii la logică și mîngîindu-ne cu gîndul că, oricum, ea a relevat complexitatea nebănuită a numărului, pune pe gînduri autenticitatea reducției. Aritmetica a fost tradusă în limbajul subiacent — al cărei discipline?. Al teoriei mulțimilor, înclină îndeobște să răspundă matematicianul obișnuit; distincțiile introduse de Frege rămîn pentru majoritatea autorităților în materie simple subtilități care nu pot anula identitatea de esență între teoria mulțimilor și logica predicatelor de ordin superior cu identitate. (Într-adevăr, traducerea aritmeticii în limbajul logicii reclamă folosirea predicatelor de ordin superior.) Este însă identică teoria mulțimilor cu logica? Altfel spus, este teoria mulțimilor varianta pur extensivistă a logicii? Sau trebuie să rămînem ferm la punctul de vedere fregean după care primatul conceptului asupra extensiunii sale merge pînă acolo încît devine cu neputință a mai vorbi despre mulțimi ca despre obiecte bine definite, în absența predicatelor prin intermediul cărora sînt introduse? — Pe de altă parte, *ce*

este logica? Nu puţini filozofi s-au îndoit de faptul că logica de ordin superior are dreptul de a se numi logică în acelaşi sens plenar în care este logica predicatelor de ordinul 1 fără identitate. Şi, în al treilea rînd, chiar dacă acceptăm fără vreo reticenţă ca logică pură teoria tipurilor (*id est* o logică de ordin superior evitînd paradoxele cunoscute), validarea reducţiei aritmeticii la logică întîmpină un obstacol din altă parte: cu toate că aritmetica se traduce integral în limbajul teoriei tipurilor, unele axiome presupuse de sistemul formal al aritmeticii nu sînt scheme valide, adevăruri logic-necesare, a căror negare ar crea vreo inconsistenţă formală. Ca atare, aritmetica ar fi logică numai dacă extindem nepermis înţelesul cuvîntului „logică"; în fapt, ea nu s-ar contopi, ci doar s-ar intersecta pe porţiuni largi cu logica propriu-zisă; graniţele acesteia din urmă ar fi, de altfel, imprecise.

Toate aceste întîmpinări şi dubii justificate învederează amurgul programului panlogist — căci logicismul reprezintă tocmai un splendid panlogism filozofic învestit cu aparenţele ştiinţificităţii —, dar nu ştirbesc cu nimic însemnătatea cuceririlor lui Frege în logică şi filozofia matematicii.

3. Efortul lui Frege trebuie evaluat nu doar prin prisma rezultatului fundamental, legat de definiţia numărului, oricît de însemnat ar fi însuşi acesta. La o dreaptă măsură ajungem numai cîntărind în sine rezultatele privite de Frege însuşi ca simple mijloace. El făcea logică în vederea asigurării unor fundamente trainice edificiului matematic; însă el nu a apelat la o concepţie preexistentă, ci şi-a făurit, printr-un efort titanic, instrumentele de care avea nevoie. Pentru logică şi filozofie, scrierea lui Frege are o semnificaţie mai mare chiar decît pentru fundamentele şi filozofia matematicii.

Împreună cu anterioara *Scriere conceptuală* din 1879, *Fundamentele aritmeticii* inaugurează un *nou stil* în filo-

zofia matematicii; ele recomandă *analiza logică exactă* a conceptelor și propozițiilor, logica matematică cu întreg alaiul ei de criterii și idei teoretice, ca pe un ingredient esențial al reflecției filozofice asupra matematicii. Logica devine curea de transmisie între proiectul filozofic și creația matematică. După ce, grație algebrei logicii, străvechea disciplină ctitorită de Aristotel își dovedise capacitatea de înnoire prin *receptarea* instrumentului matematicii, acum vine să arate că are tot atîta de dat cît de primit, ca într-o autentică *Filie*: un Platon *redivivus* ar putea exemplifica prin restituția creatoare a datoriei contractate de logică conceptul ideal al prieteniei.

Independent de adoptarea sau respingerea punctului de vedere logistic, logica ajunge efectiv *Organon* al fundamentelor și filozofiei matematicii: Nu numai ca instrument esențial al metamatematicii în sens hilbertian, nu numai ca mijloc al construcției sistemelor formale și chiar ca parte constitutivă — subsistem — al acestor sisteme, ci și ca mediu deosebit de prielnic reflexiei filozofice. Dacă mai adăugăm aportul la filozofia logicii și la logica formală propriu-zisă, *Fundamentele aritmeticii* apar ca una dintre cele mai bogate desfășurări de gînd produse în secolul XIX la confinele logicii, filozofiei și matematicii. Într-o enumerare incompletă am putea menționa, în această ordine de idei, distincția concept–obiect argumentată de Frege ca bază teoretică a formalizării termenilor generali în logica predicatelor, teoria descripțiilor, analiza conceptului de „existență" cu aplicare la „argumentul ontologic", infirmat pe temeiuri logice, metoda definițiilor prin abstracție, descifrarea conținutului formal al „determinării numerice" (*Zahlangabe*), ca stînd în aplicarea unui număr la un concept, metoda generală de desprindere a conceptelor și relațiilor din forme propoziționale cu variabile libere ș.a. Sperăm că am stăruit

suficient în cuprinsul *Notelor* însoțitoare asupra acestor inovații, pentru ca acum să ne fie îngăduit a trece mai departe, la elementul propriu-zis *filozofic* al gîndirii lui Frege.

4. Metoda fregeană a analizei logice crește pe temelia unei *filozofii* a logicii, matematicii și limbajului ca dintr-un sistem de rădăcini bine ramificate și implîntate în solul unui raționalism consecvent, al unei epistemologii alimentate de problematica marilor filozofii ale lui Leibniz și Kant. După cum va remarca lesne cititorul, întrebarea fundamentală de la care pleacă matematicianul german poartă nu asupra ființei lumii, ci asupra cunoașterii logico-matematice; în joc intră *natura judecăților matematice*: adevărurile matematicii sînt analitice ori sintetice *a priori*? Cum se vede, întrebarea este formulată în termenii lui Kant. Acestor termeni kantieni, Frege le conferă însă un sens revizuit. Distincția analitic–sintetic este legată de distincția epistemologică sensibil–rațional (logic), pe cînd distincția *a priori–a posteriori* poartă asupra justificării intrinseci a conținuturilor judecate, și nu asupra condițiilor în care se mișcă cunoașterea ca operă a subiectului uman. Epurînd ca psihologiste orice preocupări legate de geneza cunoașterii subiective, ceea ce mai rămîne pentru epistemologie este fundarea conținutului obiectiv. Totodată, analitic este pentru Frege orice adevăr derivat exclusiv din legile fundamentale ale logicii și din definiții, în timp ce sintetică este orice propoziție în al cărei conținut intră un element factual, non-logic. Propozițiile geometriei sînt sintetice *a priori*, cele ale logicii însă analitice; judecățile aritmeticii sînt analitice dacă și numai dacă aritmetica este reductibilă la logică. Ipoteza logicistă a lui Frege comandă bateria argumentelor filozofice din *Scrierea conceptuală* și *Fundamentele aritmeticii*, critica îndreptată împotriva unor concepții tradiționale despre număr și adevăr aritmetic. Frege respinge empiris-

deasupra) realitate. Obiectele lumii materiale, date sensibilității, au realitate, în timp ce conceptele şi obiecte abstracte în genul numerelor, mulțimilor, sau, de exemplu, linia ecuatorului, au numai obiectivitate, dar nu realitate. Obiectivitatea, Frege o înțelege în două sensuri, fie ca existență în afară de subiect, fie ca însuşire de a fi „acelaşi pentru toți". Obiectele abstracte şi conceptele au obiectivitate însă nu realitate. Frege nu este astfel realistul platonic cu care ne-a obişnuit o parte a exegezei, fiindcă el nu hipostaziază entitățile pînă la a le conferi realitate, ceea ce ar fi însemnat — după cum reiese desluşit din explicațiile date de el — a le conferi atributul existenței autonome în spațiu şi timp. Despre realitatea lumii materiale, la care sensibilitatea are acces, Frege se exprimă în termenii realismului sănătos, materialist al omului înzestrat cu bun-simț, fără a recurge la argumentele scepticului sau la problematica despărțire kantiană între aparența fenomenală (lucrul pentru noi) şi lucrul în sine. Numerele însă, şi la fel conceptele, neavînd realitate au autonomie logică (dacă este vorba de primele) sau n-o au (conceptele), dar obiectivitate au pe deplin.

SORIN VIERU

FUNDAMENTELE ARITMETICII

O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr

CUPRINS[2]

§ 8. Justificarea definiţiilor nu reclamă observarea acelor fapte.

Sînt oare legile aritmeticii adevăruri inductive?

§ 9. Lege a naturii la Mill. Spunînd că adevărurile aritmetice sînt legi ale naturi, Mill le confundă cu aplicaţiile lor.
§ 10. Temeiuri pentru a contesta că legile adunării sînt adevăruri inductive; neuniformitatea numerelor; definiţia numerelor nu oferă de la sine o mulţime de proprietăţi comune ale numerelor; probabil că inducţia este aceea care trebuie fundată pe baza aritmeticii.
§ 11. „Înnăscut" la Leibniz.

Legile aritmeticii sînt oare sintetice a priori sau sînt analitice?

§ 12. Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Intuiţia interioară ca temei al cunoaşterii.
§ 13. Diferenţa dintre aritmetică şi geometrie.
§ 14. O comparaţie între adevăruri sub raportul domeniilor guvernate de ele.
§ 15. Concepţiile lui Leibniz şi St. Jevons.
§ 16. Împotriva lor, Mill discreditează „manipularea iscusită a limbajului". Semnele nu sînt goale numai pentru că nu semnifică ceva perceptibil.
§ 17. Insuficienţa inducţiei. Presupunerea că legile inducţiei sînt judecăţi analitice; în ce constă atunci utilitatea lor. Apreciere a valorii judecăţilor analitice.

II. Opiniile unor autori asupra conceptului de număr

§ 18. Necesitatea unei analize a conceptului general de număr.
§ 19. Definiţia nu poate fi geometrică.
§ 20. Este definibil numărul? Hankel. Leibniz.

Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?

§ 21. Opiniile lui M. Cantor şi E. Schröder.
§ 22. Opinia contrară a lui Baumann: lucrurile exterioare nu constituie unităţi stricte. Numărul depinde în aparenţă de modul nostru de concepere a lucrurilor.
§ 23. Nu se poate admite opinia lui Mill, după care numărul este o proprietate a unui agregat de lucruri.
§ 24. Larga aplicabilitate a numărului. Mill. Locke. Figura metafizică incorporală a lui Leibniz. Dacă numărul ar fi de natură senzorială, el nu ar putea fi atribuit nesenzorialului.
§ 25. Diferenţa de ordin fizic între 2 şi 3 la Mill. Potrivit lui Berkeley, numărul nu există *realiter* în lucruri, ci este o creaţie a cugetului.

Este numărul ceva subiectiv?

§ 26. Descrierea construcţiei numărului lui Lipschitz nu este adecvată şi nu poate înlocui o definiţie a conceptului. Numărul nu este un obiect al psihologiei, el este obiectiv.
§ 27. Numărul nu este, cum pretinde Schloemilch, reprezentarea poziţiei unui obiect în cadrul unui şir.

§ 28. Thomae despre conferirea denumirilor.

III. Opinii privitoare la Unitate și Unu

Exprimă numeralul „unu" o proprietate a obiectelor?

§ 29. Ambiguitatea expresiilor, „μονάς" și „unitate". Definiția dată de E. Schröder: unitatea ca obiect al numărării este în aparență inadecvată. Adjectivul „un" nu cuprinde o determinare mai precisă, nu poate servi ca predicat.
§ 30. Tentativele lui Leibniz și Baumann de definire a unității par să estompeze total conceptul unității.
§ 31. Criteriile indivizibilității și delimitării lui Baumann. Nu orice obiect ne conduce la ideea unității (Locke).
§ 32. Și totuși, limba indică o conexiune cu indivizibilitatea și delimitarea, dar se produce o deplasare de sens.
§ 33. Indivizibilitatea (G. Kopp) nu poate fi ridicată la rangul de criteriu al unității.

Sînt oare identice unitățile?

§ 34. Identitatea ca temei al denumirii „unitate". E Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Prin abstragere de la diferențele lucrurilor nu se obține conceptul de număr, iar lucrurile nu devin identice între ele.
§ 35. Diversitatea este necesară chiar spre a se putea vorbi despre pluralitate. Descartes. E. Schröder. St. Jevons.
§ 36. Înțelegerea unităților ca distincte se ciocnește de dificultăți. Unu-urile distincte la St. Jevons.

§ 37. Definițiile numărului pe baza unității sau a lui unu. la Locke, Leibniz, Hesse.
§ 38. „Unu“ este un nume propriu, „unitate“ este un număr comun. Numărul nu poate fi definit ca unități. Deosebirea dintre „și“ și +.
§ 39. Dificultatea concilierii identității cu discernabilitatea unităților este camuflată de ambiguitatea cuvîntului „unitate“.

Încercări de a înlătura dificultatea

§ 40. Spațiul și timpul ca mijloace de distingere. Hobbes. Thomae. Împotriva lor: Leibniz, Baumann, St. Jevons.
§ 41. Țelul nu este atins.
§ 42. Poziția în cadrul unui șir ca mijloc de distingere. Hankel despre instituire.
§ 43. Oglindirea obiectelor prin mijlocirea semnului 1 la Schröder.
§ 44. Abstragerea de la caracterul diferențelor cu păstrarea faptului existenței lor la Jevons. 0 și 1 sînt numere la fel ca celelalte. Dificultatea continuă să subziste.

Soluția dificultății

§ 45. Privire retrospectivă.
§ 46. Asertiunea numerică cuprinde un enunț despre un concept. Obiecția că numărul variază, conceptul rămînînd neschimbat.
§ 47. Caracterul factual al asertiunii numerice se explică prin obiectivitatea conceptului.
§ 48. Soluția unor dificultăți.
§ 49. Confirmare la Spinoza.
§ 50. Explicația lui E. Schröder.
§ 51. Corectarea acesteia.

IV. Conceptul de număr

Fiecare număr individual este un obiect de sine-stătător

Spre a obține conceptul de număr trebuie stabilit sensul unei identități numerice.

Completare şi verificare a definiţiei noastre

Numere infinite

V. Încheiere

Alte numere

INTRODUCERE

La întrebarea ce este numărul unu, sau ce înseamnă semnul 1, se răspunde de obicei: „un lucru“[3]. Iar dacă vom atrage atenţia asupra faptului că propoziţia

„numărul unu este un lucru“

nu constituie o definiţie, deoarece într-o parte ea conţine articolul hotărît, pe cînd în cealaltă parte articolul nehotărît, că ea nu face decît să încadreze numărul unu printre lucruri, fără a specifica însă despre care lucru este vorba, ni se va răspunde, probabil, că ne putem alege oricare lucru vrem spre a-l numi unu. Dar dacă fiecare ar avea dreptul să înţeleagă sub această denumire orice doreşte, atunci una şi aceeaşi propoziţie despre unu ar fi înţeleasă în mod diferit de către oameni diferiţi; aceste propoziţii nu ar avea vreun conţinut comun. Poate că unii vor refuza să răspundă la această întrebare, arătînd că semnificaţia literei *a* în cadrul aritmeticii nu poate fi nici ea precizată, şi că, în cazul cînd am spune „*a* înseamnă un număr“, afirmaţia noastră ar putea suscita aceeaşi obiecţie ca definiţia: „unu este un număr“. Or, în cazul lui *a*, refuzul de a răspunde la întrebare este pe deplin îndreptăţit; într-adevăr, *a* nu semnifică un număr determinat, specificat ca atare, ci serveşte pentru a exprima universalitatea propoziţiilor. Dacă în $a + a - a = a$ punem în locul lui *a* un număr arbitrar, dar acelaşi peste tot,

obținem întotdeauna o egalitate adevărată. Acesta este sensul în care este folosită litera *a*. În cazul lui unu însă, lucrurile stau cu totul altfel. Oare în egalitatea $1 + 1 = 2$ putem înlocui pe 1, în ambele locuri unde apare, prin unul și același obiect, de pildă Luna? Dimpotrivă, s-ar părea că pe primul 1 trebuie să-l înlocuim prin ceva diferit de ceea ce înlocuiește pe al doilea 1. Cum se face că aici trebuie procedat într-un mod care în celălalt caz ar fi eronat? Totodată, aritmetica nu se poate mulțumi numai cu litera *a*, ci este nevoită să utilizeze și alte litere (*b*, *c* etc.), pentru a exprima în formă generală relații între numere diferite[4]. S-ar putea presupune deci că nici semnul 1 nu ar fi suficient, dacă, în mod similar, el ar fi destinat să confere generalitate propozițiilor. Dar numărul unu apare ca un obiect determinat ale cărui proprietăți pot fi specificate; de exemplu, unu are proprietatea de a rămîne neschimbat în cazul înmulțirii cu el însuși. În acest sens, dimpotrivă, *a* nu are proprietăți care pot fi specificate, întrucît ceea ce se enunță despre *a* este o proprietate comună a tuturor numerelor, în timp ce $1^1 = 1$ nu enunță nimic despre Lună, despre Soare, despre Sahara sau despre vîrful Teneriffe; într-adevăr, ce sens ar putea avea un atare enunț?[5]

La întrebări ca acestea nici matematicienii, în majoritatea lor, nu sînt pregătiți să dea un răspuns satisfăcător. Nu este însă penibil ca știința să persiste în neclaritate, în privința obiectului ei primordial, obiect atît de simplu în aparență? Cu atît mai puțin se va putea spune ce este numărul în genere. Atunci însă cînd un concept fundamental al unei științe importante suscită dificultăți, cercetarea mai amănunțită a acestui concept, în scopul depășirii dificultăților, constituie o sarcină imperioasă, cu atît mai mult cu cît ar fi greu să se elucideze pe deplin natura numerelor negative, raționale sau complexe, atîta timp cît înțelegerea

fundației pe care se reazemă întregul edificiu al aritmeticii rămîne nesatisfăcătoare.

Mulți vor considera, desigur, că aceasta ar fi o osteneală de prisos. După părerea lor, conceptul în cauză a fost tratat suficient în manualele elementare și epuizat astfel o dată pentru totdeauna. Cine ar crede că mai are ceva de învățat într-o chestiune atît de simplă? Conceptul de număr întreg pozitiv este considerat a fi într-atît de neproblematic, încît se crede că el ar putea fi prezentat științific și exhaustiv pînă și copiilor și că oricine, fără a mai trebui să reflecteze și să cunoască ceea ce au gîndit alții, știe tot ce se poate ști despre acest concept. Prin urmare, nu este îndeplinită deloc prima condiție preliminară a învățării: a ști că nu știm[6]. Rezultatul este că ne mulțumim în continuare cu o concepție rudimentară, deși încă Herbart* profesase o doctrină mai adecvată[7]. Este tulburător și demoralizant faptul că rezultatele dobîndite anterior riscă astfel mereu să se piardă iarăși, că atîta trudă pare să fi fost zadarnică, și aceasta numai pentru că autosuficiența ne face să nu considerăm necesar a ne însuși roadele cunoașterii. Îmi dau bine seama că și lucrarea de față este expusă aceluiași pericol. Împotriva mea se ridică acea concepție rudimentară după care calculul ar fi o gîndire agregativă, mecanică**. Personal, mă îndoiesc că în genere există o asemenea gîndire[8]. Mai curînd am putea admite o facultate a reprezentării de natură agregativă, însă ea nu prezintă vreo însemnătate pentru calcul. În esență, gîndirea este peste tot aceeași: legile gîndirii nu se diferențiază după un obiect sau altul. Deosebirile constau

---

* *Sämtliche Werke*, ed. Hartenstein, vol. X, Partea I, *Umriss pädagogischer Vorlesungen*, § 252, Obs. 2: „Doi nu înseamnă două lucruri, ci dublarea" etc.

** K. Fischer, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, ed. 2, § 94.

doar în gradul mai mare sau mai mic de puritate şi de independenţă faţă de factorii de ordin psihologic şi faţă de mijloacele auxiliare exterioare ale gîndirii (limbajul, notaţiile numerelor etc.), precum şi în fineţea mai mare sau mai mică a construcţiei conceptelor; însă tocmai în această privinţă matematica nu poate fi depăşită de nici una dintre ştiinţe, nici măcar de către filozofie.

Din scrierea de faţă se va putea vedea că pînă şi un raţionament în aparenţă atît de specific matematic cum este cel de la n la $n + 1$ se întemeiază pe legile generale ale logicii[9] şi că nu avem nevoie să apelăm la legi speciale ale unei gîndiri agregative. Fireşte, noi putem folosi mecanic simbolurile numerelor, tot aşa cum putem vorbi papagaliceşte; însă cu greu s-ar putea numi aceasta gîndire. Dar, ce-i drept, este posibil ca limbajul simbolic al matematicii să fie astfel construit, prin intermediul gîndirii reale, încît ulterior, ca să spunem aşa, să gîndească el pentru noi. Aceasta însă nu dovedeşte că numerele s-ar fi format într-un anume mod mecanic, aşa cum, de pildă, grămezile de nisip se formează din grăunţe de cuarţ[10]. După părerea mea, este în interesul matematicienilor ca să combatem o atare concepţie care duce la discreditarea unui obiect principal al ştiinţei lor şi discreditează astfel însăşi această ştiinţă. Afirmaţii de acelaşi gen le putem întîlni însă pînă şi în lucrările matematicienilor. În opoziţie cu aceste concepţii, va trebui să admitem, dimpotrivă, că conceptul de număr are o structură mai complicată decît aceea a majorităţii conceptelor din alte ştiinţe, deşi numărul rămîne unul dintre cele mai simple concepte aritmetice[11].

Pentru a spulbera deci iluzia că numerele întregi pozitive nu suscită de fapt nici o dificultate şi că există un consens unanim asupra lor, am considerat oportun să discut unele păreri ale filozofilor şi matematicienilor, în legătură

cu problemele ridicate aici. Se va vedea cît de puţin concordă între ele aceste păreri; vom avea prilejul să întîlnim chiar şi concepţii diametral opuse. De exemplu, în timp ce unii afirmă că „unităţile sînt identice între ele“, alţii le consideră diferite, fiecare aducînd în sprijinul poziţiei sale argumente care nu pot fi respinse fără o examinare atentă. Ceea ce mi-am propus în cele de faţă este să trezesc dorinţa unei analize mai minuţioase. Totodată, examinarea preliminară a părerilor exprimate de alţii va curăţi terenul pentru propria mea concepţie, astfel ca oricine să se convingă din capul locului că celelalte căi nu duc la ţintă şi că părerea mea nu este una printre multe altele, egal îndreptăţite; sper astfel să rezolv definitiv problema, cel puţin în aspectele ei esenţiale.

Desigur, expunerea mea va lua astfel o turnură mai filozofică decît ar putea admite numeroşi matematicieni; însă analiza temeinică a conceptului de număr comportă inevitabil un anumit element filozofic. Problema aparţine atît matematicii cît şi filozofiei.

Dacă, în pofida demersurilor întreprinse de ambele părţi, conlucrarea celor două ştiinţe este departe de a înflori, aşa cum am dori şi cum ar fi posibil, această stare de lucruri, după părerea mea, se datorează preponderenţei în filozofie a metodelor psihologice de analiză, metode care au pătruns pînă şi în domeniul logicii. Această orientare nu are nici un punct de contact cu matematica, fapt ce explică lesne aversiunea multor matematicieni faţă de considerentele filozofice. Astfel, cînd Stricker* spune că reprezentările noastre asupra numerelor sînt fenomene motorii, dependente de senzaţiile musculare, matematicianul nu mai este în măsură a recunoaşte aici numerele sale şi nu are ce să

* *Studien über Association der Vorstellungen*, Viena, 1883.

facă cu o propoziție de acest gen. O aritmetică fundată pe senzații musculare ar fi, de bună seamă, senzațională, însă ar rămîne la fel de confuză ca și fundațiile pe care se reazimă. Nu, aritmetica nu are nici o tangență cu senzațiile, precum nici cu imaginile interioare plăsmuite din urmele impresiilor senzoriale anterioare. Inconstanța și vagul în care plutesc toate aceste configurații contrastează puternic cu precizia și soliditatea conceptelor și obiectelor matematicii. Cercetarea reprezentărilor și a metamorfozelor suferite de acestea se poate dovedi, firește, utilă; psihologia nu trebuie să-și închipuie însă că ar putea aduce vreo contribuție la fundamentarea aritmeticii[12]. Pentru matematician ca atare, aceste imagini mentale, geneza și transformarea lor, nu prezintă nici o importanță. Stricker însuși afirmă că el nu asociază cuvîntului „o sută" altceva decît reprezentarea semnului 100. Alții și-ar putea reprezenta litera C sau orice altceva. Oare de aici nu urmează că, în cazul nostru, aceste imagini mentale sînt absolut irelevante pentru esența chestiunii? Nu urmează că ele sînt absolut accesorii, asemenea tablei negre și a unei bucăți de cretă care, nici ele, nu pot fi numite reprezentări ale numărului o sută? Așadar, nu ne este îngăduit să credem că esența chestiunii ar consta în asemenea reprezentări! Să nu confundăm descrierea modului de apariție a unei reprezentări cu o definiție, să nu confundăm determinarea condițiilor psihosomatice în care devenim conștienți de o propoziție cu demonstrația acesteia și să nu confundăm adevărul unei propoziții cu faptul de a fi gîndită. Trebuie reamintit, se pare, că o propoziție nu încetează a fi adevărată în clipa cînd eu încetez să o mai gîndesc, tot așa cum nici Soarele nu dispare în clipa cînd închid ochii. În caz contrar, s-ar putea ajunge pînă acolo încît în demonstrarea teoremei lui Pitagora să trebuiască să menționăm conținutul în fosfor al creierului nos-

tru, iar un astronom să șovăie să extindă concluziile sale asupra trecutului îndepărtat, de teamă ca să nu i se obiecteze: „Ai socotit aici că 2 · 2 = 4; însă ideea de număr are și ea o evoluție, o istorie! E îndoielnic ca ea să fi ajuns încă de pe atunci într-un stadiu atît de avansat. De unde știi că în acel trecut îndepărtat propoziția noastră exista deja? Oare ființele de atunci nu ar fi putut avea propoziția 2 · 2 = 5, din care apoi, prin selecție naturală în cursul luptei pentru existență, să fi luat naștere propoziția 2 · 2 = 4? Și, — cine știe! — poate că însăși această din urmă propoziție este cumva sortită să se transforme, în același mod, în 2 · 2 = 3.“ — *Est modus in rebus, sunt certi denique fines!* Abordarea istorică chemată să dea la iveală devenirea lucrului, pentru a cunoaște astfel însăși esența acestuia, are, desigur, justificarea sa; ea își are însă limitele sale. Dacă în fluxul continuu al tuturor lucrurilor nu am mai reține nimic stabil, etern, universul ar înceta să mai fie recognoscibil și totul s-ar topi într-un vîrtej haotic. După cum s-ar părea, unii își închipuie că noțiunile apar în sufletul individual așa cum apar frunzele pe copaci și consideră că am putea cunoaște esența conceptelor cercetînd apariția acestora și dîndu-le o explicație psihologică, pornind de la natura cugetului uman. Această concepție transformă însă orice lucru în ceva subiectiv și, dusă pînă la capăt, e la antipodul adevărului. Ceea ce se numește istorie a conceptelor este de fapt istoria cunoașterii de către noi, fie a conceptelor, fie a semnificațiilor cuvintelor. Așa cum se întîmplă în mod frecvent, abia un imens efort intelectual care poate continua secole întregi duce la cunoașterea unui concept în puritatea sa, curățat de suprapunerile străine care îl ascund ochilor minții. Ce să spunem atunci despre aceia care, în loc de a duce mai departe această operă în domeniile unde ea nu pare a se fi încheiat, o desconsideră și se refugiază

în camera copiilor sau în cele mai străvechi perioade ale evoluției omenirii, pentru ca să descopere acolo, ca J. St. Mill, aritmetica turtelor dulci sau a pietricelelor! Nu ne mai rămîne decît să atribuim aromelor culinare o semnificație specială pentru conceptul de număr. O asemenea procedură se situează la antipodul celei raționale și este, în orice caz, cum nu se poate mai nematematică. Nu e de mirare că matematicienii nu vor să audă nimic despre ea! În loc de a afla o deosebită puritate a conceptului pe măsură ce credem a ne apropia de izvoarele sale, toate lucrurile apar ca printr-o ceață, spălăcite și amorfe. Lucrurile se prezintă ca și cum, pentru a cunoaște America, cineva ar vrea să se pună iarăși în situația lui Columb, în momentul cînd acesta a zărit prima lucire șovăielnică a presupusei sale Indii. Firește, această comparație nu demonstrează nimic; sper însă că ea înfățișează cît se poate de limpede punctul meu de vedere. În numeroase cazuri, se poate întîmpla, desigur, ca istoria descoperirilor anterioare să-și dovedească utilitatea ca demers preliminar în vederea cercetărilor ulterioare; dar nu este permis ca ea să uzurpe locul acestora[13].

În ceea ce îi privește pe matematicieni, combaterea unor atari concepții ar fi fost într-adevăr superfluă; întrucît însă în încercarea de a soluționa controversatele probleme discutate i-am avut în vedere și pe filozofi, m-am văzut silit să fac mici incursiuni în domeniul psihologiei, fie și numai pentru a respinge intruziunea ei în domeniul matematicii.

De altfel, formulări psihologice întîlnim pînă și în manualele de matematică. Atunci cînd autorul se simte obligat să dea o definiție fără a fi însă în stare să-și realizeze intenția, el încearcă cel puțin să descrie modul în care se ajunge la obiectul sau conceptul respectiv. Situația poate fi identificată cu ușurință: în cursul expunerii ulterioare autorul nu se mai poate întoarce niciodată la asemenea

explicații. Demersurile introductive, în scopuri didactice, sînt pe deplin justificate; trebuie însă să le distingem întotdeauna în mod clar de o definiție. Un exemplu admirabil al modului în care pînă și matematicienii pot confunda temeiurile demonstrației cu condițiile psihice sau fizice ale producerii demonstrației ni-l oferă E. Schröder*, atunci cînd, sub titlul „Axiomă specială", scrie următoarele: „Principiul pe care l-am avut în minte s-ar putea intitula Axioma inerției semnelor. Acest principiu ne dă certitudinea că de-a lungul tuturor expunerilor și raționamentelor noastre, semnele rămîn întipărite atît în memoria noastră, cît și — cu atît mai mult — pe hîrtie" ș.a.m.d.[14]

Dacă, pe de o parte, matematica trebuie să refuze orice asistență din partea psihologiei, pe de altă parte ea nu poate contesta strînsa ei conexiune cu logica. Eu merg chiar pînă la a fi de acord cu cei care susțin imposibilitatea unei delimitări nete între matematică și logică. În orice caz, se va admite că orice investigație asupra valabilității unei demonstrații sau a justificării unei definiții este, în mod inevitabil, o investigație de natură logică. Dar asemenea chestiuni nu pot fi eliminate din matematică, deoarece numai dîndu-le un răspuns putem obține certitudinea necesară.

În această direcție, de asemenea, eu merg desigur ceva mai departe decît se obișnuiește. Majoritatea matematicienilor se mulțumesc, atunci cînd sînt întreprinse cercetări de acest gen, să răspundă cerințelor imediate. Cînd o definiție se dovedește operantă în cadrul demonstrațiilor, cînd nu ne ciocnim nicăieri de contradicții, cînd descoperim conexiuni între lucruri aparent fără legătură între ele și ajungem astfel la o ordonare și o regularitate superioară, obișnuim a considera că definiția respectivă a fost asigurată într-un

* *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.*

mod satisfăcător şi ne mai interesăm prea puţin de justificarea ei logică. Acest procedeu are în orice caz avantajul că nu ne abate prea mult de la ţelul urmărit. Sînt şi eu gata să admit că definiţiile trebuie apreciate după eficienţa lor, după posibilităţile pe care le oferă în vederea efectuării demonstraţiilor. Trebuie însă să ţinem seama de faptul că rigoarea demonstraţiei rămîne iluzorie, chiar dacă lanţul deducţiilor nu prezintă nici o lacună, atîta timp cît definiţiile nu-şi găsesc justificarea decît în mod tardiv, şi anume prin faptul că nu am ajuns la o contradicţie. Procedînd astfel, unica certitudine pe care o putem dobîndi este esenţialmente empirică şi efectiv trebuie să acceptăm eventualitatea descoperirii ulterioare a unei contradicţii care să ruineze întregul edificiu[15]. Din acest motiv, m-am crezut obligat să revin mai mult decîtconsideră a fi necesar majoritatea matematicienilor asupra fundamentelor logice generale.

În cercetarea de faţă am adoptat trei principii fundamentale:

trebuie să distingem întotdeauna în mod riguros psihologicul de logic, subiectivul de obiectiv[16];

semnificaţia cuvintelor nu trebuie căutată în izolarea lor, ci numai în contextul propoziţiei[17];

trebuie avută în vedere distincţia dintre concept şi obiect[18].

Conform primului principiu, am folosit întotdeauna cuvîntul „reprezentare“ [*Vorstellung*] în sens psihologic, făcînd o distincţie între reprezentări, pe de o parte, concepte şi obiecte, pe de altă parte. Atunci cînd nu se respectă al doilea principiu, ne vedem siliţi să acceptăm în calitate de semnificaţii ale cuvintelor imagini mentale sau acte ale psihicului individual, încălcînd astfel primul principiu. În ceea ce priveşte al treilea punct, ar fi o iluzie să ne închipuim că un concept poate fi transformat în obiect, fără a-l modifica.

De aici urmează că o anume teorie formală larg răspîndită asupra fracțiilor, numerelor negative etc. este inconsistentă. In scrierea de față nu pot decît să indic în linii mari o soluție mai bună. În cazul numerelor de acest tip, ca şi în cazul numerelor întregi pozitive, problema revine la a stabili sensul unei identități.

Cred că rezultatele la care am ajuns vor obține, cel puțin în linii mari, adeziunea acelor matematicieni care îşi dau osteneala să examineze argumentele mele. Mi se pare că ele plutesc deja în aer, şi nu este exclus ca fiecare dintre ele în parte, sau cel puțin rezultate apropiate, să fi fost deja exprimate; cu toate acestea, aşa cum sînt prezentate aici în conexiunea lor reciprocă, ele pot constitui încă o noutate. Am fost adesea surprins să constat că expuneri care într-o anumită privință se apropiau foarte mult de propria mea concepție se îndepărtau totuşi în mod substanțial de ea, în alte privințe.

Felul cum vor fi primite aceste rezultate de către filozofi va diferi de la caz la caz, în funcție de punctul de vedere al fiecăruia; cea mai rea primire le-o vor face, desigur, empiriştii care nu recunosc ca procedeu originar de raționament decît inducția şi pînă şi pe aceasta o consideră nu ca un raționament propriu-zis, ci ca o deprindere. Poate că un filozof sau altul va folosi acest prilej pentru a supune propria sa teorie a cunoaşterii unei noi verificări. Celor care ar înclina să critice definițiile mele ca artificiale, le-aş sugera că în cazul de față problema nu este dacă aceste definiții sînt naturale, ci dacă ele ating miezul chestiunii şi sînt logic inatacabile.

Îmi permit să sper că şi filozofii, dacă vor examina fără prejudecăți scrierea mea, vor găsi unele lucruri folositoare.

§ 1. După ce s-a îndepărtat un timp de la rigoarea euclidiană, matematica se reîntoarce în prezent la ea şi se străduieşte chiar să o depăşească. În aritmetică, fie şi numai datorită originii indiene a mai multor metode şi concepte ale sale, se încetăţenise un mod de gîndire mai puţin riguros decît în geometrie, care a fost cu precădere o creaţie a grecilor. Elaborarea analizei superioare nu a făcut decît să stimuleze această tendinţă; într-adevăr, tratarea riguroasă a acestei teorii s-a ciocnit de dificultăţi considerabile, aproape de neînvins, dificultăţi a căror depăşire nu făgăduia totuşi să răsplătească eforturile depuse în acest scop. Evoluţia ulterioară a arătat însă din ce în ce mai limpede că matematica nu se poate mulţumi cu simpla convingere morală, susţinută de numeroase aplicaţii încununate de succes. Pentru numeroase aserţiuni care înainte erau admise, ca de la sine înţelese, se pretinde astăzi o demonstraţie. În multe cazuri, limitele de valabilitate ale unei propoziţii au ajuns să fie stabilite astfel pentru prima oară. S-a arătat că noţiunile de funcţie, continuitate, limită, infinit necesită o definiţie mai riguroasă. Numărul negativ şi numărul iraţional, care fuseseră admise de mai multă vreme în cadrul ştiinţei, au fost supuse unei examinări mai exigente, chemată să stabilească dreptul lor de cetăţenie.

Pretutindeni ne întîmpină astfel aspiraţia de a da demonstraţii riguroase, de a delimita precis graniţele validităţii

și, spre a se putea ajunge la aceasta — tendința de a defini riguros conceptele.

§ 2. Urmînd acest drum, va trebui să ajungem la conceptul de număr[19] și la cele mai simple propoziții asupra numerelor întregi pozitive care constituie fundamentul întregii aritmetici. Negreșit, formule numerice cum sînt 5 + 7 = 12 și legi ca aceea a asociativității adunării își găsesc atîtea confirmări în cadrul numeroaselor lor aplicații cotidiene, încît punerea lor la îndoială, prin reclamarea unei demonstrații, poate părea de-a dreptul ridicolă. Dar, prin însăși natura ei, în locul unei verificări inductive matematica preferă, ori de cîte ori aceasta este posibil, o demonstrație. Euclid demonstrează numeroase lucruri pe care oricine i le-ar fi admis oricum. Dar, atunci cînd matematicienii nu s-au mai declarat satisfăcuți cu gradul euclidian de rigoare, ei au ajuns la cercetările legate de axioma paralelelor.

Astfel, încă de pe acum orientarea în direcția unei rigori maxime a depășit în numeroase privințe cerințele inițiale, accentuîndu-se mereu și extinzîndu-se în diverse domenii.

Demonstrația, trebuie spus, nu are numai scopul de a pune adevărul unei propoziții la adăpost de orice îndoială; ea ne face cunoscută, de asemenea, dependența reciprocă a adevărurilor. După ce încercările nereușite de a-l clinti ne-au convins că un bloc de piatră este de neclintit, mai rămîne să ne întrebăm ce anume îl susține atît de solid. Cu cît ducem mai departe aceste cercetări, cu atît mai puține ajung adevărurile inițiale la care reducem totul; această simplificare, luată în sine, este un scop demn de toată atenția noastră[20]. Nu este exclus ca să se confirme și o altă speranță, anume aceea că, pornind de la elucidarea activității spontane a oamenilor în cazurile cele mai simple și desprinzînd de aici ele-

mentul universal valid, vom ajunge la cunoaşterea unor procedee generale de elaborare a conceptelor şi de întemeiere a propoziţiilor, procedee aplicabile chiar în cazurile mai complicate[21].

§ 3. Mobiluri de ordin filozofic m-au condus de asemenea la cercetări de acest gen. Întrebările privind natura apriorică sau aposteriorică, sintetică sau analitică a adevărurilor aritmetice îşi aşteaptă aici răspunsul lor. Într-adevăr, deşi înseşi aceste concepte aparţin filozofiei[22], soluţia, după părerea mea, nu poate fi obţinută fără a chema în ajutor matematica. Fireşte, aceasta depinde de sensul pe care îl dăm problemelor în cauză.

Nu o dată se întîmplă ca descoperirea conţinutului unei propoziţii să preceadă demonstraţia riguroasă a acesteia din urmă, obţinută pe alte căi, mai anevoioase; însăşi această demonstraţie ne permite adesea să cunoaştem mai precis condiţiile valabilităţii propoziţiei. În genere, deci, problema modului în care ajungem la conţinutul unei judecăţi trebuie separată de problema modului în care justificăm aserţiunea respectivă.

După părerea mea, distincţiile între *a priori* şi *a posteriori*, sintetic şi analitic, nu privesc conţinutul judecăţii, ci justificarea emiterii ei*. Acolo unde justificarea lipseşte, dispare şi posibilitatea efectuării acestei clasificări. O eroare apriorică este aşadar un lucru la fel de absurd ca, de pildă, un concept albastru. Cînd spunem că o propoziţie este aposteriorică sau apriorică în sensul pe care îl am eu în vedere, noi nu judecăm asupra condiţiilor psihologice, fiziologice şi fizice care au permis constituirea în conştiinţă a conţinu-

* Prin aceasta nu urmăresc, desigur, să atribui un nou sens acestor termeni, ci numai să stabilesc ceea ce au avut în vedere autori anteriori şi în special Kant.

tului propoziţiei; de asemenea, nu ne pronunţăm asupra modului în care altcineva a ajuns s-o considere, poate în mod eronat, adevărată; ne pronunţăm asupra temeiului cel mai adînc care justifică acceptarea adevărului acestei propoziţii.

Problema este astfel scoasă din domeniul psihologiei şi plasată în domeniul matematicii, atunci cînd este vorba de un adevăr matematic. Acum, ceea ce se cere este de a descoperi demonstraţia, reducînd-o, pas cu pas, pînă la adevărurile primitive. Dacă, o dată angajaţi pe acest drum, ajungem numai la legile logice generale şi la definiţii, adevărul are un caracter analitic; se presupune, totodată, că au fost luate în consideraţie şi acele propoziţii de care depinde admisibilitatea fiecărei definiţii[23]. Dacă însă efectuarea demonstraţiei este imposibilă atîta timp cît nu facem apel la adevăruri care nu sînt de natură general-logică, ci aparţin unui anumit domeniu special al ştiinţei, propoziţia este sintetică. Pentru ca un adevăr să fie aposterioric, este necesar ca demonstraţia lui să facă apel la fapte; cu alte cuvinte, să folosească adevăruri indemonstrabile şi care nu au caracter universal, ele cuprinzînd enunţuri despre obiecte determinate în mod special[24]. Dacă, dimpotrivă, demonstraţia poate fi întreprinsă exclusiv pe baza unor legi universale, care nu admit şi nici nu pretind o demonstraţie, atunci adevărul este aprioric*.

* Admiţînd în genere existenţa unor adevăruri universale, trebuie să admitem totodată existenţa unor legi originare; într-adevăr, numai din fapte individuale nu decurge nimic, decît în temeiul unei legi. Însăşi inducţia se sprijină pe propoziţia generală potrivit căreia demersul inductiv poate întemeia adevărul unei legi, sau cel puţin probabilitatea aceleia din urmă. Pentru cel ce contestă aceasta, inducţia nu este decît un fenomen psihologic, un procedeu prin care oamenii ajung să creadă în adevărul unei propoziţii, fără ca ceea ce ei cred să aibă cea mai mică justificare.

§ 4. Pornind de la aceste probleme filozofice, ajungem la aceleaşi cerinţe care, independent de aceasta, se ridicaseră în matematici — cerinţa de a demonstra cu rigoare maximă, ori de cîte ori este posibil, propoziţiile fundamentale ale aritmeticii. Într-adevăr, numai eliminarea cît se poate de scrupuloasă a oricărei lacune din lanţul raţionamentelor ne permite să afirmăm cu deplină certitudine care sînt adevărurile originare pe care se sprijină demonstraţia; or, problemelor de mai sus le vom putea da un răspuns numai cu condiţia ca să cunoaştem aceste adevăruri.

Dacă încercăm acum să dăm curs acestei cerinţe, ajungem imediat la propoziţii a căror demonstrare rămîne imposibilă atîta timp cît nu reuşim să reducem conceptele care figurează în cadrul lor la alte concepte mai simple, sau la un element de mai mare generalitate[25]. În cazul de faţă este vorba în primul rînd despre număr, care trebuie să fie sau definit sau recunoscut ca fiind imposibil de definit. Cartea de faţă îşi propune elucidarea acestei chestiuni*. Răspunsul dat va determina şi soluţia problemei privind natura legilor aritmetice.

Înainte de a aborda înseşi aceste chestiuni, îmi propun să fac cîteva observaţii preliminare privitor la ceea ce ar putea constitui cheia unui răspuns. Într-adevăr, dacă abordînd problema prin prisma altor concepţii vom afla temeiuri pentru a atesta caracterul analitic al propoziţiilor fundamentale ale aritmeticii, atunci aceste temeiuri vor pleda şi pentru demonstrabilitatea aceloraşi propoziţii, precum şi pentru posibilitatea definirii conceptului de număr. O înrîurire în sens opus o vor avea temeiurile caracterului apos-

* Ca atare, în cele ce urmează, atunci cînd nu se va specifica nimic altceva, va fi vorba numai despre numerele pozitive întregi, care răspund la întrebarea „cîţi", „cîte".

terioric al acestor adevăruri. De aceea, este indicat să întreprindem un examen preliminar al acestor chestiuni controversate.

I. Opiniile unor autori asupra naturii propozițiilor aritmetice

Sînt oare demonstrabile formulele numerice?

§ 5. Formulele numerice care se referă la numere determinate, cum este formula 2 + 3 = 5, trebuie distinse de legile generale valabile pentru toate numerele.

Aceste formule sînt considerate de către unii filozofi* ca indemonstrabile și nemijlocit evidente, asemenea unor axiome[26]. Kant** le declară indemonstrabile și sintetice, ezitînd însă a le denumi axiome, dat fiind faptul că ele nu sînt generale și că sînt în număr infinit[27]. Hankel[28]*** afirmă pe drept cuvînt că admiterea unei infinități de adevăruri originare indemonstrabile este paradoxală și inadecvată. În fapt, ea contrazice una din exigențele rațiunii, și anume evidența fundamentelor prime. Să fie oare nemijlocit evident că

135 664 + 37 863 = 173 527 ?

Nicidecum! Și tocmai aceasta îl face pe Kant să susțină natura sintetică a acestor propoziții. Dar același fapt pledează cu atît mai mult împotriva indemonstrabilității acelorași

---

* Hobbes, Locke, Newton. Cf. Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*, pp. 241 și 242, 365 și urm., 475.

** *Kritik der reinen Vernunft*, herausgeg. v. Hartenstein, III, p. 157.

*** *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Funktionen*, p. 55.

propoziţii; căci cum altfel decît prin intermediul unei demonstraţii le-am putea sesiza, de vreme ce ele nu prezintă o evidenţă nemijlocită? Kant nu ezită să invoce intuiţia degetelor sau a punctelor[29], riscînd astfel ca, împotriva intenţiei sale, să prezinte ca empirice aceste propoziţii; căci, într-adevăr, intuiţia a 37 863 de degete nu este în nici un caz o intuiţie pură. Mai mult, termenul „intuiţie" nu pare a fi adecvat, dat fiind că şi 10 degete, prin dispunerea lor într-un mod sau altul, pot suscita cele mai felurite intuiţii. Dar, în genere, avem noi oare o intuiţie a 135 664 de degete sau puncte? Dacă am avea această intuiţie, împreună cu intuiţia a 37 863 de degete şi alta a 173 527 de degete, valabilitatea formulei noastre, dacă ea ar fi indemonstrabilă, ar fi imediat evidentă, cel puţin în cazul degetelor; însă nu acesta este cazul.

Kant a avut în vedere, desigur, numai numere mici. Aşadar, formulele pentru numere mari ar fi demonstrabile, în timp ce formulele pentru numere mici sînt nemijlocit evidente prin intuiţie. Însă trasarea unei distincţii principiale între numerele mici şi numerele mari este contestabilă, cu atît mai mult cu cît între ele cu greu s-ar putea trage o linie de demarcaţie rigidă. Dacă formulele numerice ar fi demonstrabile începînd de la 10, să spunem, ne-am putea întreba pe drept cuvînt: de ce nu începînd de la 5, de la 2, de la 1?

§ 6. Alţi filozofi şi matematicieni au susţinut, pe de altă parte, că formulele numerice sînt demonstrabile. Leibniz* spune:

„Că 2 şi cu 2 fac 4 nu este un adevăr imediat; să admitem că *patru* înseamnă trei şi cu unu. Demonstraţia poate fi făcută, şi anume astfel:

---

* *Nouveaux Essais*, IV, § 10, ed. Erdmann, p. 363.

Definiții: 1) *Doi* este unu și cu unu.
2. *Trei* este Doi și cu unu.
3) *Patru* este Trei și cu unu.

Axiomă: înlocuind egalii prin egali, egalitatea persistă.

Demonstrație: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
Def. 1. Def. 2. Def. 3.

Deci, conform axiomei: $2 + 2 = 4$."

La prima vedere, această demonstrație pare a fi integral construită din definiții și din sus-menționata axiomă. La rîndul ei, axioma ar putea fi transformată într-o definiție, așa cum procedează însuși Leibniz într-un alt loc*. S-ar părea că despre 1, 2, 3, 4 nu avem nevoie să știm decît ceea ce este cuprins în definiții. La o examinare mai atentă descoperim însă o lacună, camuflată de omiterea parantezelor. Și anume, pentru a fi mai riguroși, trebuia să se scrie:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Lipsește aici propoziția

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

propoziție care constituie un caz particular al lui

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Dacă asumăm această lege, se constată cu ușurință că orice formulă a adunării poate fi demonstrată în mod similar. Așadar, fiecare număr trebuie definit pe baza celui precedent. În fapt, nu văd cum un număr ca 437 986 ar putea să ne fie dat într-un mod mai adecvat decît acela propus de Leibniz.

---

* *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, ed. Erdmann, p. 94.

Chiar fără a avea vreo reprezentare preliminară despre acest număr, noi reuşim astfel a-l lua în stăpînire. Mulţimea infinită a numerelor este redusă, prin intermediul acestor definiţii, la numărul unu şi mărirea cu unu; orice formulă din infinitatea formulelor numerice se poate demonstra pe baza cîtorva propoziţii generale.

Aceasta este şi opinia lui H. Grassmann[30] şi a lui H. Hankel. Primul încearcă să obţină legea

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

pe baza unei definiţii, după cum urmează*:

„Dacă a şi b sînt termeni arbitrari ai şirului fundamental, vom înţelege prin suma $a + b$ acel termen al şirului fundamental care satisface formula

$$a + (b + e) = a + b + e.“$$

Aici, e trebuie să însemne unitatea pozitivă. Împotriva acestei interpretări putem aduce două observaţii. În primul rînd, suma este definită prin ea însăşi. În cazul cînd nu ştim încă ce înseamnă $a + b$, nu înţelegem nici expresia $a + (b + e)$. Această obiecţie ar putea fi însă evitată, eventual, dacă — intrînd desigur în contradicţie cu formularea de mai sus — nu suma, ci adunarea ar constitui obiectul definiţiei. Dar, şi în acest caz s-ar putea obiecta că $a + b$ constituie o notaţie lipsită de conţinut atunci cînd nu există nici un termen al şirului fundamental, sau cînd există mai mulţi termeni ai acestuia care ar satisface condiţia prescrisă. Grassmann presupune pur şi simplu, fără demonstraţie, că aceasta nu se întîmplă niciodată; dar astfel, rigoarea procedeului său rămîne o simplă aparenţă.

---

* *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*. Partea I. *Arithmetik*, Stettin, 1860, p. 4.

§ 7. S-ar putea crede că formulele numerice sînt sintetice sau analitice, aposteriorice sau apriorice, după cum sînt şi legile generale de care atîrnă demonstraţia lor. John Stuart Mill[31] este însă de părerea opusă. Ce-i drept, la început el pare să intenţioneze a întemeia ştiinţa — ca Leibniz[32] — pe definiţii*, deoarece defineşte numerele individuale în acelaşi mod ca şi Leibniz; însă prejudecata sa că întreaga cunoaştere este empirică denaturează imediat această idee justă. Într-adevăr, el ne aduce la cunoştinţă** că definiţiile în cauză nu ar fi definiţii în sens logic, că ele nu se mărginesc să stabilească semnificaţia unei expresii, ci afirmă totodată un fapt observat. Dar ce anume ar putea fi, în întregul univers, faptul observat sau — cum mai spune Mill — faptul fizic asertat în cuprinsul definiţiei numărului 777 864? Din întregul imperiu al faptelor fizice care se volatilizează aici sub ochii noştri, Mill ne specifică unul singur, care ar urma să fie asertat în cadrul definiţiei numărului 3. Acest fapt constă, după Mill, în existenţa unor colecţii de obiecte care, producînd asupra simţurilor noastre impresia $^{0}_{0}{}^{0}$, pot fi totodată separate în două părţi astfel: 0 0 0. Spre fericirea noastră, nu toate lucrurile din lume sînt bătute în ţinte! Căci dacă ar fi fost aşa, nu am fi putut efectua această separaţie şi 2 + 1 nu ar mai fi fost 3! Ce păcat însă că Mill nu ne-a înfăţişat şi acele fapte fizice care stau la baza numerelor 0 şi 1!

Mill continuă: „După ce această propoziţie a fost acceptată, noi numim toate grupările de acest fel 3." Constatăm, aşadar, că de fapt nu este corect să vorbim despre trei bătăi, atunci cînd ceasul bate trei, sau să numim dulcele, acrul şi amarul trei senzaţii gustative; la fel de inadmisibilă este şi expresia „trei metode de rezolvare a unei ecuaţii". Într-ade-

* *System der deduktiven und induktiven Logik*, übersetzt von J. Schiel, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

** *Op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 2.

văr, nici unul din cazurile amintite nu oferă o impresie senzorială similară cu cea produsă de $^{0}{}_{0}{}^{0}$.

Mill spune însă: „Calculele nu decurg din definiţia însăşi, ci din faptele observate." Dar oare unde ar fi trebuit să apeleze Leibniz la amintitul fapt, în cadrul demonstraţiei de mai sus a propoziţiei 2 + 2 = 4? Mill omite indicarea acestei lacune, deşi propria lui demonstraţie pentru propoziţia 5 + 2 = 7 este absolut analogă demonstraţiei lui Leibniz*. Adevărata lacună, care rezidă în omiterea parantezelor, nu este sesizată de Mill, cum nu a sesizat-o nici Leibniz.

Dacă definiţia fiecărui număr în parte ar aserta într-adevăr un fapt fizic particular, niciodată nu l-am putea admira destul, pentru profunda cunoaştere a naturii de care dă dovadă, pe acel om care operează cu numere cu nouă cifre. Poate că Mill nu merge în această privinţă atît de departe, încît să susţină că toate aceste fapte ar trebui observate unul cîte unul, ci opinează că ar fi suficient să derivăm prin inducţie o lege generală care să le înglobeze pe toate. Dar dacă încercăm a formula această lege, vom constata că este imposibil. Nu ajunge să spunem: există colecţii mari de lucruri, colecţii care pot fi separate în părţi; căci, spunînd aceasta nu am spus că există colecţii de mărimea şi felul celor pe care le reclamă, de pildă, definiţia numărului 1 000 000 şi nici nu am specificat mai exact modul separării lor. Concepţia lui Mill duce în mod necesar la cerinţa ca pentru fiecare număr să existe un fapt observat în mod deosebit, căci în cadrul unei legi generale s-ar pierde tocmai ceea ce este caracteristic pentru numărul 1 000 000 şi aparţine neapărat definiţiei acestuia. Potrivit lui Mill, noi nu putem afirma de fapt că 1 000 000 = 999 999 + 1, dacă în preala-

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

bil nu am observat acest mod caracteristic de separare în părți a unei colecții de lucruri, mod care diferă de cel propriu oricărui alt număr.

§ 8. Mill pare a susține că definițiile 2 = 1 + 1, 3 = = 2 + 1, 4 = 3 + 1 etc. nu sînt admisibile înainte ca faptele la care dînsul se referă să fi fost observate. Într-adevăr, nu putem să definim 3 ca (2 + 1), înainte de a fi acordat un sens lui (2 + 1). Se pune însă întrebarea dacă pentru aceasta este nevoie să observăm colecția respectivă, precum și separarea ei în părți. Dacă ar fi așa, numărul 0 ar rămîne o enigmă, căci nimeni nu a izbutit pînă în clipa de față să vadă sau să pipăie 0 pietricele[33]. Mill ar spune, fără îndoială, că 0 este ceva lipsit de sens, un simplu mod de a vorbi; calculele cu 0 ar fi numai un joc cu semne goale; singurul lucru de mirare ar fi cum de aici mai poate rezulta ceva rațional. Dacă însă aceste calcule au o semnificație serioasă, însuși semnul 0 nu poate fi cu totul lipsit de sens. Dar atunci se conturează de la sine eventualitatea ca, în același mod ca 0, 2 + 1 să aibă un sens chiar dacă faptul invocat de Mill nu a fost observat. Într-adevăr, cine ar putea pretinde că a observat acel fapt pe care, după Mill, l-ar conține definiția unui număr cu 18 cifre, și cine ar tăgădui că un asemenea număr are totuși un sens?

Se va fi crezînd, poate, că de faptele fizice s-ar face uz numai pentru numere mai mici — pînă la 10, să spunem — pe cînd celelalte numere ar putea fi construite plecînd de la acestea. Dar dacă 11 poate fi format din 10 și 1 printr-o simplă definiție, fără a trebui să mai vedem colecția corespunzătoare, atunci nu există un temei să nu putem construi în același fel și numărul 2, din 1 și 1. Dacă operațiile de calcul efectuate cu numărul 11 nu decurg dintr-un anume fapt caracteristic pentru acest număr, cum se face totuși că ope-

rațiile cu numărul 2 trebuie să se sprijine pe observarea unei anumite colecții și pe o anumită separare caracteristică a acesteia din urmă?

Poate că se va ridica întrebarea: cum ar fi cu putință aritmetica, dacă nu am putea distinge prin intermediul simțurilor noastre nici un lucru, sau am putea distinge numai trei lucruri? Nu încape îndoială că o atare stare de lucruri s-ar răsfrînge nefavorabil asupra cunoașterii de către noi a propozițiilor aritmetice și a aplicațiilor acestora; ar fi însă afectat și adevărul acestor propoziții?[34] Atunci cînd numim empirică o propoziție din motivul că pentru a deveni conștienți de conținutul acesteia a trebuit să facem observații, noi nu folosim cuvîntul „empiric“ în sensul în care este opus lui „aprioric“. Noi emitem o aserțiune psihologică ce privește numai conținutul propoziției; chestiunea adevărului propoziției nu este luată aici în considerație. În acest sens, poveștile lui Münchhausen sînt și ele empirice; căci, negreșit, pentru ca ele să poată fi născocite au trebuit să fie făcute felurite observații.

Sînt oare legile aritmeticii adevăruri inductive?

§ 9. Considerațiile expuse pînă în prezent fac probabilă derivabilitatea formulelor numerice exclusiv pe baza definițiilor numerelor individuale, cu ajutorul cîtorva legi generale, fără ca aceste definiții să aserteze fapte observate sau să presupună legitimitatea unor atare fapte. Se pune deci problema de a stabili natura respectivelor legi.

În demonstrația amintită mai sus a formulei $5 + 2 = 7$, Mill* vrea să aplice principiul: „ceea ce este compus din părți este compus din părți ale acestor părți“. El consideră

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

această propoziție ca o formulare mai pregnantă a principiului cunoscut îndeobște sub forma: „sumele egalilor sînt egale". Mill o numește adevăr inductiv și lege naturală de ordinul cel mai înalt. Caracteristic pentru impreciziunea expunerii sale este faptul că Mill nu invocă principiul în acel punct al demonstrației în care el însuși îl consideră indispensabil: dar, după cum s-ar părea, adevărul său inductiv este destinat să reprezinte axioma lui Leibniz: „dacă înlocuim egalii prin egali, egalitatea rămîne neschimbată". Dar, pentru a le putea intitula legi ale naturii, Mill conferă adevărurilor aritmetice un sens pe care acestea nu îl au. De exemplu*, el consideră că egalitatea 1 = 1 ar putea fi falsă, deoarece o greutate de un funt nu cîntărește întotdeauna exact atît cît alta. Însă propoziția 1 = 1 nici nu afirmă aceasta.

Mill înțelege semnul + în sensul că acesta ar exprima relația părților unui corp fizic sau ale unei grămezi față de întregul din care fac parte; însă nu acesta este sensul semnului de mai sus. 5 + 2 = 7 nu semnifică faptul că turnînd 2 volume de lichid peste 5 volume de lichid obținem 7 volume de lichid; aceasta constituie o aplicație a propoziției, valabilă numai cu condiția ca să nu survină vreo modificare de volum, de exemplu ca urmare a unei reacții chimice. Mill confundă în permanență aplicațiile posibile ale unei propoziții aritmetice, aplicații care sînt adesea de natură fizică și presupun fapte observate, cu înseși propozițiile pur matematice. În numeroase aplicații, semnul plus poate avea, desigur, aparența de a corespunde modului de formare a unei grămezi; nu aceasta este însă semnificația lui; într-adevăr, în cadrul altor aplicații s-ar putea nici să nu fie vorba despre grămezi, agregate sau despre relația unui corp fizic cu părțile sale, spre pildă atunci cînd calculul poartă asupra unor evenimente. Firește că și aici putem vorbi despre părți,

* *Op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 3.

însă acest cuvînt nu mai este întrebuințat atunci în sens fizic sau geometric, ci în sens logic, ca atunci cînd vorbim despre asasinarea suveranilor ca despre o parte a asasinării în genere. Avem aici cazul subordonării logice. Tot astfel, *nici adunarea nu* corespunde în general vreunei relații fizice. În consecință, legile generale ale adunării nu pot fi nici ele legi ale naturii.

§ 10. Dar ele nu ar putea fi totuși adevăruri inductive? Cum s-ar putea concepe acest lucru? De la ce fapte ar trebui să pornim pentru a ne ridica la universal? De bună seamă, n-am putea porni decît de la formulele numerice. Firește că astfel pierdem iar avantajul obținut prin definițiile numerelor individuale și de aceea vom avea să căutăm alte modalități de întemeiere a formulelor numerice. Chiar dacă ocolim această dificultate, nu tocmai neglijabilă, nu vom găsi totuși un teren propice inducției: într-adevăr, lipsește aici uniformitatea care în alte domenii face ca inducția să constituie un procedeu atît de sigur. Încă Leibniz*, la afirmația lui Philalèthe, după care:

> „diferitele moduri ale numărului nu admit altă diferență decît aceea de mai mult sau mai puțin; ca atare, ele sînt moduri simple, ca acelea ale spațiului",

dădea următorul răspuns:

> „Aceasta se poate spune despre timp și despre linia dreaptă, însă în nici un caz despre figuri și cu atît mai puțin despre numere, care nu sînt numai deosebite ca mărime dar și neasemănătoare. Un număr par poate fi divizat în două părți egale, în timp ce un număr impar nu poate fi astfel divizat. Trei și șase sînt numere triunghiulare, patru

* Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 39; ed. Erdmann, p. 243.

și nouă sînt pătrate, opt este cub etc., iar în cazul numerelor aceasta se întîmplă încă și mai des decît în cazul figurilor; într-adevăr, două figuri inegale pot fi perfect asemănătoare, însă în cazul numerelor aceasta nu se întîmplă niciodată."[35]

Fără îndoială, ne-am deprins să considerăm numerele ca fiind în mai multe privințe de același gen; motivul este însă numai acela că noi cunoaștem o mulțime de propoziții generale valabile pentru toate numerele. În cazul de față însă, noi trebuie să presupunem că nici o asemenea lege nu a fost încă descoperită. În fapt, ar fi greu să găsim un exemplu de raționament inductiv corespunzător cazului nostru. În alte împrejurări, ni se întîmplă în mod frecvent să aplicăm propoziția după care o poziție spațială oarecare și un moment arbitrar al timpului sînt în și pentru sine la fel de bune ca toate celelalte. Un efect se poate produce la fel de bine într-alt loc și timp, cu singura condiție ca toate celelalte împrejurări să rămînă neschimbate. Dar în cazul numerelor acest principiu cade, întrucît numerele sînt aspațiale și atemporale. În șirul numerelor, pozițiile nu sînt echivalente între ele, așa cum sînt echivalente punctele spațiului[36].

Totodată, numerele se raportează între ele cu totul altfel decît indivizii unei specii animale, să spunem; prin însăși natura sa, fiecare număr are o anumită poziție de ordine, este constituit într-un anume mod propriu și are specificitatea sa, care iese în relief în mod deosebit în cazul lui 0, 1 și 2. În altă parte, atunci cînd întemeiem prin inducție o propoziție asupra unei specii, noi dispunem de obicei de un întreg șir de proprietăți comune, date prin însăși definiția conceptului speciei. În cazul de față, însă, ar fi greu să găsim măcar o singură proprietate comună care să nu necesite ea însăși o demonstrație prealabilă.

Cazul nostru ar putea fi comparat cu cea mai mare ușurință cu cel de mai jos. Să presupunem că forăm un puț și că am observat o creștere constantă a temperaturii, proporțională cu adîncimea; totodată, pînă acum am întîlnit straturi de roci foarte variate. Este limpede că pornind numai de la observațiile făcute cu prilejul acestui foraj nu se poate conchide nimic asupra naturii rocilor mai adînci și că ar fi prematur să afirmăm că variația temperaturii după aceeași regulă va persista. Ce-i drept, conceptului „ceea ce se constată în cazul forajului continuu" i se subsumează atît cele observate pînă acum cît și cele aflate la o adîncime mai mare; dar în cazul de față, aceasta nu ne poate fi de folos. La fel de puțin ne ajută în cazul numerelor și faptul că ele se subsumează în totalitatea lor conceptului „ceea ce se obține prin mărirea continuă cu unu". Între cele două cazuri trebuie trasată o distincție, întrucît straturile sînt numai descoperite, în timp ce prin mărirea repetată cu unu numerele sînt de-a dreptul create și determinate în întreaga lor natură. Aceasta nu poate să însemne altceva decît că toate proprietățile unui anumit număr, de pildă numărul 8, sînt derivabile din modul în care acesta a fost generat prin mărirea cu unu. Dar astfel se admite principiul că proprietățile numerelor decurg din definițiile acestora și se deschide posibilitatea demonstrării legilor generale ale numerelor din modul lor comun de generare, în timp ce proprietățile speciale ale numerelor individuale ar urma să fie derivate din modul special în care ele au fost formate prin mărirea repetată cu unu[37]. Tot astfel, în cazul straturilor terestre, acea proprietate care este determinată exclusiv de adîncimea la care sînt situate, și anume poziția lor relativă, poate fi dedusă pe baza acesteia însăși, fără a mai apela la inducție; dar o proprietate care nu este determinată astfel nu se poate descoperi nici prin inducție.

Putem presupune că însuşi demersul inductiv nu poate fi justificat decît cu ajutorul propoziţiilor generale ale aritmeticii — desigur, dacă prin inducţie nu înţelegem o simplă habitudine. Aceasta din urmă nu are, fireşte, virtutea de a garanta adevărul. Demersul ştiinţific ghidat de norme obiective descoperă uneori într-o singură confirmare temeiul unei probabilităţi ridicate, în timp ce alteori respinge o mie de concordanţe ca neavînd aproape nici o valoare; habitudinea, dimpotrivă, este determinată de numărul şi intensitatea impresiilor şi de circumstanţe subiective care nu au nici un drept să influenţeze judecata noastră. Inducţia trebuie să se reazeme pe teoria probabilităţilor, deoarece ea nu poate face nicicînd o propoziţie mai mult decît probabilă. Este însă de neînţeles cum ar putea fi dezvoltată această teorie, dacă nu presupunem legi ale aritmeticii[38].

§ 11. Leibniz* consideră, dimpotrivă, că adevărurile necesare, cum sînt cele întîlnite în aritmetică, trebuie să aibă principii a căror demonstrare nu depinde de exemple şi astfel nici de evidenţa simţurilor, deşi fără existenţa simţurilor nimeni nu ar fi avut prilejul să le gîndească. „Întreaga aritmetică ne este înnăscută şi în mod virtual se găseşte înăuntrul nostru." Un alt pasaj** ne explică ceea ce înţelege Leibniz prin expresia „înnăscut": „Nu este adevărat că tot ceea ce se învaţă nu este înnăscut. Adevărurile numerelor sînt în noi şi nu mai puţin ele sînt învăţate fie prin extragerea lor de la sursă, atunci cînd sînt învăţate la modul demonstrativ (ceea ce arată tocmai faptul că ele sînt înnăscute), fie..."[39]

* Baumann, *op. cit.*, vol. II, pp. 13–14 (ediţia Erdmann, pp. 195, 208–209).

** Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 38 (ed. Erdmann, p. 212).

Legile aritmeticii sînt oare sintetice a priori, sau sînt analitice?

§ 12. Considerînd opoziția între analitic și sintetic, se obțin patru combinații, dintre care însă una, și anume

analitic *a posteriori,*

cade. Dacă optăm, împreună cu Mill, pentru *a posteriori,* nu ne mai rămîne așadar nici o alegere, încît mai trebuie să examinăm doar posibilitățile

sintetic *a priori*

și

analitic.

Kant se pronunță pentru prima. În acest caz, nu mai avem altă posibilitate decît invocarea unei intuiții pure ca temei ultim de cunoaștere, deși în cazul de față este greu de spus dacă este vorba despre o intuiție spațială, temporală sau de orice alt gen. Baumann* este de acord cu Kant, deși din motive întru cîtva diferite. După Lipschitz**, de asemenea, propozițiile care afirmă independența numărului față de modalitatea numărării, precum și față de comutativitatea și asociativitatea termenilor sumei, derivă din intuiția interioară. Hankel*** fundează teoria numerelor reale pe trei principii, cărora le conferă caracterul de *notiones communes*: „Explicația le face perfect evidente, ele sînt valabile pentru mărimile oricărui domeniu, conform intuiției pure a mărimii și, fără a pierde caracterul pe care-l au, pot fi transformate în definiții, dacă precizăm că prin adunare a mărimilor vom înțelege o operație care satisface aceste propoziții."

---

* *Op. cit.*, vol. II, p. 669.

** *Lehrbuch der Analysis*, vol. I, p. 1 (Bonn, 1877).

*** *Theorie der complexen Zahlensysteme*, pp. 54 și 55.

în ultima aserţiune există ceva neclar. Chiar dacă definiţia ar putea fi construită, ea nu poate înlocui propoziţiile fundamentale iniţiale; într-adevăr, aplicarea definiţiei ar ridica iarăşi problema dacă numerele sînt mărimi şi dacă ceea ce obişnuim a numi adunare a numerelor este adunare în sensul acestei definiţii. Pentru a răspunde, ar trebui să cunoaştem deja acele propoziţii iniţiale asupra numerelor. Mai departe, este şocantă expresia „intuiţie pură a mărimii". Dacă reflectăm la tot ce se numeşte mărime: numere, lungimi, suprafeţe, volume, unghiuri, curburi, mase, viteze, forţe, luminozităţi, intensităţi ale curentului electric ş.a., înţelegem foarte bine modul cum ele se pot subsuma unui c o n c e p t unic al mărimii; în schimb, expresiile „intuiţie a mărimii" şi cu atît mai mult „intuiţie pură a mărimii" nu sînt admisibile. Eu nu pot admite nici măcar o intuiţie a lui 100 000, şi cu atît mai puţin a numărului în general, sau chiar a mărimii în general. Cu prea multă uşurinţă apelăm la intuiţia interioară, ori de cîte ori nu putem invoca un alt temei. Ar fi recomandabil însă să nu pierdem chiar cu totul din vedere sensul cuvîntului „intuiţie".

În *Logica* sa (ed. Hartenstein, vol. VIII, p. 88), Kant defineşte intuiţia după cum urmează: „Intuiţia este o reprezentare individuală (*repraesentatio singularis*), conceptul este o reprezentare generală (*repraesentatio per notas communes*) sau reflexivă (*repraesentatio discursiva*)."

Aici nu se face menţiune despre raportarea la sensibilitate, deşi aceasta este presupusă tacit în cadrul esteticii transcendentale, şi deşi în absenţa ei intuiţia nu poate constitui principiul de cunoaştere a judecăţilor sintetice apriorice. În *Critica raţiunii pure* (ed. Hartenstein, III, p. 55), se spune: „Prin intermediul sensibilităţii deci ne sînt *date* obiecte, şi ea singură ne procură *intuiţii*."[40]

Prin urmare, în logică sensul termenului „intuiţie" este mai larg decît în estetica transcendentală. În sens logic, am

putea spune, eventual, că 100 000 este o intuiție; căci, ce-i drept, concept general nu este. Dar dacă luăm intuiția în acest sens, ea nu poate contribui la fundamentarea legilor aritmeticii.

§ 13. În genere, va fi indicat să nu supraestimăm înrudirea aritmeticii cu geometria. Am adus mai sus un pasaj din Leibniz, unde această idee este combătută. Luat în sine, un punct geometric nu poate fi distins în nici un mod de oricare alt punct; același lucru este valabil pentru drepte și plane. Abia atunci cînd intuiția cuprinde simultan mai multe puncte, drepte, plane, ele ajung să fie distinse. Faptul că în geometrie propozițiile generale trebuie derivate din intuiție este cît se poate de evident, întrucît punctele, dreptele, planele intuite nu au propriu-zis vreo particularitate și ca atare sînt autorizate să reprezinte întregul gen. În cazul numerelor, lucrurile stau altfel: fiecare număr își are particularitățile sale. Ca atare, nu se poate spune de la bun început în ce măsură un anumit număr poate reprezenta toate celelalte numere și unde intervine specificitatea sa.

§ 14. Compararea adevărurilor în raport cu domeniile pe care le guvernează pledează la rîndul ei împotriva naturii empirice și sintetice a legilor aritmetice.

Propozițiile empirice sînt valabile pentru realitatea fizică sau psihologică, adevărurile geometrice guvernează domeniul intuiției spațiale, indiferent dacă este vorba de ceva real sau de un produs al imaginației noastre. Viziunile delirante cele mai stranii, invențiile cele mai îndrăznețe ale mitului și poeziei, unde animalele vorbesc și stelele încremenesc, pietrele se prefac în oameni și oamenii se prefac în copaci, iar cel ce se cufundă în mlaștină iese de acolo trăgîndu-se singur de propriul său păr — toate acestea, în măsura

in care rămîn intuibile, ascultă totuşi de axiomele geometriei. Numai gîndirea conceptuală se poate elibera într-un anume mod de sub dominaţia acestor axiome, atunci cînd ea postulează, să spunem, un spaţiu cu patru dimensiuni sau cu o curbură pozitivă. Aceste cercetări nu sînt cîtuşi de puţin inutile; ele părăsesc însă cu totul terenul intuiţiei. Dacă totuşi se apelează şi la ajutorul acesteia, ea este tot intuiţia spaţiului euclidian, unicul spaţiu ale cărui configuraţii le putem intui. Numai că, atunci, intuiţia nu va fi luată aşa cum este ea, ci ca simbolizînd altceva; de exemplu, numim drept sau plan ceea ce este totuşi intuit ca o curbă. Pentru ţelurile gîndirii conceptuale putem postula întotdeauna contrariul unei axiome geometrice, fără să ajungem la autocontradicţii, raţionînd şi trăgînd concluzii din asemenea ipoteze care contrazic intuiţia. Această posibilitate ne arată că axiomele geometriei sînt independente unele faţă de altele şi sînt totodată independente de legile originare ale logicii, ele fiind, aşadar, sintetice[41]. Putem spune însă acelaşi lucru despre propoziţiile fundamentale ale ştiinţei numerelor? Oare nu ajungem la o confuzie totală, dacă încercăm să negăm una din aceste propoziţii? Ar mai fi posibil să gîndim în acest caz? Şi oare însăşi fundaţia aritmeticii nu este mai adîncă, în comparaţie cu orice ştiinţă empirică, inclusiv geometria? Adevărurile aritmetice guvernează domeniul a tot ce este numărabil, adică domeniul cel mai cuprinzător, care înglobează nu numai realul, nu numai intuitivul, ci şi tot ceea ce poate fi gîndit. De aceea, este firesc ca legile numerelor să se afle într-o legătură intimă cu legile gîndirii.

§ 15. Afirmaţiile lui Leibniz pot fi interpretate numai în favoarea caracterului analitic al legilor numărului; faptul era de prevăzut, deoarece pentru Leibniz aprioricul coin-

cide cu analiticul. Astfel, el afirmă* că foloasele pe care le aduce algebra sînt împrumutate de la o artă mult mai înaltă, şi anume aceea a adevăratei logici[42]. În alt loc**, el compară adevărurile necesare şi contingente cu mărimile comensurabile şi opinează că adevărurile necesare permit o demonstraţie sau o reducere la identităţi[43]. Totuşi, aceste declaraţii îşi pierd din greutatea lor, dat fiind că Leibniz înclină să privească toate adevărurile ca fiind demonstrabile***: „... orice adevăr îşi are proba sa *a priori*, scoasă din noţiunea termenilor, deşi nu este totdeauna în puterea noastră să ajungem la această analiză“[44]. Pe de altă parte, comparaţia cu comensurabilitatea şi incomensurabilitatea mărimilor ridică desigur o nouă barieră de netrecut, cel puţin pentru noi, între adevărurile necesare şi cele contingente.

Foarte hotărît se pronunţă în favoarea caracterului analitic al legilor numărului W. Stanley Jevons****: „Algebra este o logică superior dezvoltată, iar numărul doar un caracter distinctiv logic.“[45]

§ 16. Dar această concepţie comportă şi ea anumite dificultăţi. E cu putinţă ca arborele ştiinţei numărului, acest arbore tot mai înalt, tot mai ramificat şi în continuă creştere să-şi aibă rădăcinile în simple identităţi? Pe de altă parte, cum ajung formele goale ale logicii să-şi reverse în afară un asemenea conţinut?

După opinia lui Mill: „Teoria potrivit căreia, printr-o manipulare iscusită a limbajului, putem descoperi fapte şi dezvălui procesele ascunse ale naturii contrazice într-atîta

---

* Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 56 (ed. Erdmann, p. 424).

** *Ibidem*, p. 57 (ed. Erdmann, p. 83).

*** *Ibidem* (ed. Pertz, vol. II, p. 55).

**** *The Principles of Science*, Londra, 1879, p. 156.

bunul-simț, încît cine ajunge să creadă aceasta trebuie să fi făcut deja unele progrese în materie de filozofie."[46]

Aceasta este adevărat, cu condiția ca în cursul iscusitei manipulări să nu gîndim deloc. Mill critică aici un anumit gen de formalism care numai cu greu și-ar găsi un apărător. Oricine folosește cuvinte sau simboluri matematice pretinde că ele înseamnă ceva și nimeni nu va aștepta ca să rezulte ceva cu sens din simboluri goale. Un matematician poate să efectueze însă calcule complicate, fără ca să înțeleagă prin semnele sale ceva intuitiv, perceptibil prin simțuri. Aceasta nu face ca semnele respective să fie lipsite de sens; conținutul acestor semne trebuie însă deosebit de semnele înseși, chiar dacă acest conținut nu ar putea fi conceput decît tot cu ajutorul semnelor. Ne dăm seama că pentru același lucru puteau fi instituite alte semne. Este suficient să știm cum trebuie tratat logic conținutul sensibilizat în semne, iar dacă urmărim aplicarea calculelor în fizică mai trebuie să știm cum se efectuează trecerea la fenomene. Dar sensul real al propozițiilor nu trebuie văzut într-o asemenea aplicație. Universalitatea propozițiilor se pierde în mare măsură cu acest prilej, în joc intrînd un element particular, care variază de la o aplicație la alta[47].

§ 17. Oricît am diminua rolul deducției, nu se poate contesta că legile stabilite prin inducție nu sînt suficiente. Din aceste legi trebuie derivate propoziții noi, care nu sînt cuprinse în nici una din acele legi luate fiecare în parte. Noile propoziții sînt într-un fel cuprinse în toate aceste legi luate împreună, dar aceasta nu ne scutește de efortul de a le explicita, desprinzîndu-le și dîndu-le o formulare independentă. În felul acesta se deschide următoarea posibilitate. În loc de a conecta în mod direct lanțul deducțiilor cu un anumit fapt, putem lăsa acest fapt acolo unde se află, introducînd conținutul său ca o condiție. Înlocuind astfel toate faptele

dintr-un şir de gînduri prin condiţii, rezultatul se va prezenta sub forma dependenţei unei consecinţe de un şir întreg de condiţii. Acest adevăr ar fi stabilit numai prin gîndire sau, ca să folosim expresia lui Mill, prin manipularea iscusită a limbajului. Nu este exclus ca legile numărului să fie de acest gen. Atunci ele ar fi judecăţi analitice, cu toate că de regulă ele nu ar fi descoperite numai prin intermediul gîndirii; într-adevăr, ceea ce ne interesează aici nu este modul în care au fost găsite, ci genul de temei pe care se sprijină demonstraţia; sau, după cum spune Leibniz*, „nu este vorba aici despre istoria descoperirilor noastre, care diferă de la un om la altul, ci despre conexiunea şi ordinea naturală, mereu aceeaşi, a adevărurilor". Observaţiei i-ar reveni atunci sarcina de a stabili, în ultimă instanţă, dacă condiţiile cuprinse în legile astfel întemeiate sînt satisfăcute. În cele din urmă vom ajunge în aceeaşi situaţie în care ne-am fi aflat dacă am fi legat direct lanţul deducţiilor de faptele observate. Dar procedeul indicat aici este preferabil în numeroase cazuri, deoarece el conduce la o propoziţie universală a cărei aplicabilitate nu este limitată neapărat la faptele aflate în prealabil la dispoziţia noastră. Adevărurile aritmeticii s-ar raporta în acest caz la adevărurile logicii în acelaşi mod în care teoremele geometriei se raportează la axiomele geometriei. Fiecare ar concentra în sine un şir întreg de raţionamente în vederea unei utilizări ulterioare, avantajul fiind acela că nu mai avem nevoie să efectuăm raţionamentele separate, unul cîte unul, ci putem exprima simultan rezultatul întregului şir**. Dacă este aşa, atunci, într-ade-

* *Nouveaux Essais*, IV, §9; ed. Erdmann, p. 360.

** Este semnificativ că Mill (*op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 4) pare să exprime această opinie. Simţul sănătos al lui Mill învinge chiar, din cînd în cînd, părerea sa preconcepută în favoarea empiricului. Dar aceeaşi părere preconcepută îl readuce la con-

văr, grație dezvoltării prodigioase a teoriilor aritmetice şi diverselor lor aplicații, dispreţul atît de răspîndit față de judecățile analitice, precum și legenda sterilității logicii pure se vor spulbera de la sine.

Dacă această concepție — care nu a fost exprimată acum pentru întîia oară — ar putea fi elaborată în amănunt cu o rigoare care să înlăture cel mai mic dubiu, rezultatul, după părerea mea, nu ar fi nicidecum lipsit de importanță[48].

II. Opiniile unor autori asupra conceptului de număr

§ 18. Îndreptîndu-ne acum atenția asupra obiectelor originare ale aritmeticii, facem deosebirea între numerele individuale, ca 3, 4 şi aşa mai departe, şi conceptul general de număr. Or, noi am văzut deja că numerele individuale sînt derivate în mod optim în felul propus de către Leibniz, Mill, H. Grassmann şi alţii — adică plecînd de la numărul unu şi de la adunarea cu unu — dar că aceste definiții rămîn incomplete atîta timp cît numărul unu şi adunarea cu unu rămîn ele însele neexplicate. Am văzut că pentru a deriva formulele numerice din aceste definiţii trebuie să facem apel la propoziții generale. Dar, tocmai datorită caracterului lor general, asemenea legi nu pot decurge din definițiile numerelor individuale, ci numai din conceptul general de număr. Vom supune acum însuşi acest concept unui examen mai amănunţit. Ne putem aştepta atunci ca atît numărul unu cît şi adunarea cu unu să reclame o explicație, astfel încît

fuzia inițială, făcîndu-l să confunde aplicațiile fizice ale aritmeticii cu aritmetica însăşi. Mill pare a nu-şi da seama de faptul că o judecată ipotetică poate fi adevărată chiar şi atunci cînd condiția nu este adevărată.

definiția fiecărui număr în parte va trebui la rîndul ei completată.

§ 19. Aici, aş dori să obiectez de-a dreptul împotriva încercării de a înțelege numărul în mod geometric, ca raport numeric al lungimilor sau suprafețelor. Evident, s-a crezut că numeroasele aplicații ale aritmeticii în geometrie vor fi facilitate prin raportarea cît mai intimă a primelor elemente înseşi.

Newton* pretinde să se înțeleagă prin număr nu atît o mulțime de unități cît raportul abstract al unei mărimi oarecari față de o altă mărime de acelaşi gen care este luată ca unitate[49]. Se poate admite că prin aceasta este descris într-un mod adecvat numărul, în acel sens larg în care el înglobează totodată fracțiile şi numerele iraționale; dar în acest caz conceptele de mărime şi de raport între mărimi sînt presupuse. Ca atare, se pare că o definire a numărului în sens restrîns, a numărului cardinal [*Anzahl*] nu ar fi inutilă; într-adevăr, pentru a defini egalitatea a două rapoarte între lungimi, Euclid foloseşte noțiunea de multiplu egal; or, multiplul egal revine tot la o identitate numerică[50]. S-ar putea totuşi ca egalitatea rapoartelor între lungimi să fie definibilă independent de conceptul de număr. Dar şi atunci am rămîne totuşi în necunoştință de cauză asupra relației în care numărul definit geometric în acest mod s-ar afla față de numărul din viața de toate zilele. Acesta din urmă ar fi atunci cu totul despărțit de ştiință. Or, de bună seamă, aritmeticii îi putem pretinde ca să ne ofere neapărat premisele oricărei aplicări a numărului, chiar dacă aplicarea însăşi nu cade în sarcina aritmeticii. Pînă şi socotitul obişnuit trebuie să-şi afle în ştiință întemeierea procedurilor sale. Dar

---

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 475 [*Arithmetica Universalis*, vol. I, cap. II, 3].

se ridică întrebarea dacă aritmetica însăşi se poate mulţumi cu un concept geometric al numărului, atunci cînd ne referim la numărul rădăcinilor unei ecuaţii, la numărul numerelor prime cu un număr şi mai mici decît el, sau la alte cazuri asemănătoare. În schimb, numărul care răspunde la întrebarea „cît?", „cîte?" este capabil să indice şi cîte unităţi sînt cuprinse într-o lungime. Calculul cu numere negative, raţionale şi iraţionale poate fi redus la calculul cu numerele naturale. Nu este însă exclus ca Newton să fi înţeles prin mărimi — numărul fiind definit ca raport între mărimi — nu numai mărimi geometrice, ci şi mulţimi. Dar în acest caz definiţia sa nu este utilizabilă în scopul nostru, deoarece expresia „raportul unei mulţimi faţă de unitatea de mulţime" nu oferă mai multă informaţie decît expresia „număr prin care este determinată o mulţime".

§ 20. Prima chestiune va fi acum aceea dacă numărul poate fi definit. Hankel* declară că nu: „Simplitatea principială a noţiunii de instituire [*Setzung*] nu îngăduie să se definească ceea ce înseamnă a gîndi sau a institui un obiect o dată, de două ori, de trei ori..." Aici este însă mai puţin vorba despre instituire decît despre o dată, de două ori, de trei ori. Dacă s-ar putea defini acestea din urmă, faptul că instituirea nu poate fi definită ne-ar îngrijora prea puţin. Leibniz înclină să considere numărul ca o idee adecvată, sau aproximativ adecvată, adică o idee atît de clară încît tot ce se află în cuprinsul ei este de asemenea clar.

Dacă lumea înclină să considere că numărul nu poate fi definit, acest fapt se datorează mai degrabă eşecului tentativelor de a-l defini decît existenţei unor temeiuri ale indefinibilităţii deduse din natura lucrului însuşi.

* *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.

Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?[51]

§ 21. Să încercăm cel puțin a indica locul numărului printre conceptele noastre. În cadrul limbii, numerele apar de cele mai multe ori în formă adjectivală și în construcție atributivă, la fel ca și cuvintele: tare, greu, roșu, care semnifică proprietăți ale lucrurilor exterioare[52]. În mod firesc, se ridică întrebarea dacă fiecare număr în parte ar urma să fie conceput în mod asemănător și dacă, drept urmare, conceptul numărului ar putea fi alăturat, de pildă, celui al culorii.

S-ar părea că aceasta este opinia lui M. Cantor*[53], atunci cînd el caracterizează matematica drept o știință empirică, întrucît ea își trage obîrșia din considerarea lucrurilor lumii exterioare. Numărul ar apărea numai prin abstracție de la obiecte[54].

După E. Schröder** numărul copiază realitatea prin aceea că unitățile [*Einheiten*] sînt înfățișate prin intermediul unu-urilor. Acest proces, Schröder îl numește abstragerea numărului. Copierea prezintă unitățile numai sub raportul frecvenței lor, toate celelalte determinări ale lucrurilor — de pildă culoarea și forma — fiind lăsate la o parte. În cazul de față, frecvența nu este decît o altă denumire a numărului. Prin urmare, Schröder pune frecvența sau numărul pe același plan cu culoarea și forma, considerînd-o drept o proprietate a lucrurilor.

§ 22. Baumann*** respinge ideea că numărul ar fi un concept desprins din lucrurile exterioare: „Căci lucrurile

* *Grundzüge einer Elementarmathematik*, p. 2, § 4. Similar, Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis*, Bonn, 1877, p. 1.

** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig, 1873, pp. 6, 10 și 11.

*** *Op. cit.*, vol. II, p. 669.

exterioare nu ni se înfăţişează ca unităţi stricte; ele se prezintă ca grupuri delimitate sau puncte senzoriale, pe care însă avem libertatea de a le privi iarăşi ca pluralităţi." Într-adevăr, deşi eu nu sînt în stare să modific cîtuşi de puţin culoarea sau duritatea unui lucru numai pe baza modului în care îl gîndesc, eu pot gîndi *Iliada* ca pe un unic poem, ca 24 de cînturi sau ca un mare număr de versuri. Şi oare nu vorbim despre 1 000 de frunze ale unui copac într-un sens cu totul diferit de acela în care vorbim despre frunzele sale verzi? Culoarea verde o atribuim fiecărei frunze în parte, dar nu tot astfel stau lucrurile cu numărul 1 000. Putem cuprinde toate frunzele copacului sub denumirea de frunziş. Frunzişul este şi el verde, dar nu este numărul 1 000. Dar atunci cui îi revine propriu-zis proprietatea 1 000? Aproape s-ar părea că ea nu aparţine nici fiecărei frunze în parte şi nici totalităţii; nu cumva ea propriu-zis nici nu aparţine cîtuşi de puţin lucrurilor din lumea exterioară? Dacă îi dau cuiva o piatră şi îi spun: stabileşte ce greutate are — prin aceasta eu i-am definit integral obiectul cercetării sale. Dar dacă îi înmînez un pachet de cărţi de joc, spunîndu-i: stabileşte numărul respectiv, — persoana în cauză nu ştie dacă eu doresc să aflu numărul cărţilor, cel al jocurilor complete sau, să zicem, cel al atuurilor de la o partidă de skat. Prin faptul că i-am pus pachetul de cărţi în mînă eu nu i-am determinat încă în mod complet obiectul cercetării sale; mai trebuie să adaug un cuvînt: carte de joc, partidă, atu[55]. De asemenea, nu se poate afirma nici că diferitele numere se află aici unul lîngă altul, aşa cum s-ar afla diferitele culori. Eu pot arăta fiecare întindere colorată în parte, fără a pronunţa un cuvînt, dar nu pot face aceasta în cazul fiecărui număr în parte. Dacă un anumit obiect îl pot numi cu egală îndreptăţire verde şi roşu, aceasta înseamnă că obiectul respectiv nu este suportul real al verdelui. Pe acesta îl am

abia într-o întindere care este în întregime verde. Tot astfel, un obiect căruia îi pot atribui cu egală îndreptățire numere diferite nu poate fi suportul real al unui număr[56].

O deosebire esențială între culoare și număr rezidă, așadar, în faptul că culoarea albastră a unei întinderi aparține acesteia independent de bunul nostru plac. Culoarea albastră este capacitatea de a reflecta anumite raze de lumină și a absorbi într-o măsură mai mare sau mai mică alte raze, iar în această privință modul nostru de a concepe lucrurile nu poate determina nici cea mai mică modificare. Dimpotrivă, eu nu pot spune că pachetului de cărți de joc îi revine în sine numărul 1 sau numărul 100 sau oricare alt număr; pot spune, cel mult, că numărul respectiv îi revine în raport cu modul nostru arbitrar de a concepe[57] și, chiar în acest caz, nu în sensul că i-am putea atribui numărul pur și simplu ca un predicat. Ceea ce noi decidem a numi joc complet constituie, evident, o stipulare arbitrară, în care pachetul de cărți de joc nu are un cuvînt de spus. Întrucît noi însă îl considerăm sub acest raport, vom descoperi, eventual, că îl putem numi două jocuri complete. Dacă cineva nu ar ști ce se numește joc complet, ar găsi, de bună seamă, un oarecare număr, diferit de numărul doi, pentru acest pachet.

§ 23. La întrebarea: cui îi aparține ca proprietate numărul, Mill* dă următorul răspuns:

„Numele unui număr denotă o proprietate ce aparține acelui agregat de lucruri pe care îl desemnăm prin acest nume; iar această proprietate este modul caracteristic în care agregatul este compus din părți și poate fi separat în părți."

Aici o primă eroare este folosirea articolului hotărît din expresia „modul caracteristic", întrucît există moduri foarte

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

diferite în care un agregat poate fi separat în părţi şi nu se poate spune că numai unul din acestea ar fi cel caracteristic. De exemplu, o legătură de paie poate fi separată în părţile sale prin tăierea în două a tuturor paielor sale sau prin desfacerea sa, pai cu pai, sau făcînd din ea două legături. Mai departe, oare o grămăjoară de o sută de boabe de nisip este compusă în exact acelaşi fel ca o legătură de o sută de paie? Şi totuşi, avem de-a face cu acelaşi număr. Numeralul „unu" din expresia „un pai" nu exprimă însă modul în care acest pai este compus din celule sau molecule. O dificultate şi mai mare este suscitată de numărul 0. Mai departe, este oare în genere obligatoriu ca paiele să formeze o legătură, pentru ca să poate fi numărate? Oare este necesar să organizăm o întrunire a tuturor orbilor din Germania pentru ca expresia „Numărul orbilor din Germania" să aibă sens? O mie de boabe de grîu încetează să mai fie o mie de boabe de grîu după ce-au fost treierate? Şi oare există în sensul propriu al cuvîntului agregate de demonstraţii ale unei teoreme sau agregate de evenimente? Şi totuşi, acestea pot fi de asemenea numărate. Totodată, este indiferent dacă evenimentele au loc simultan sau la o distanţă de milenii.

§ 24. Ajungem astfel la un alt motiv pentru a nu pune numărul pe acelaşi plan cu culoarea şi duritatea: aplicabilitatea sa mult mai largă.

Mill* consideră că adevărul după care ceea ce se compune din părţi se compune din părţi ale acestor părţi este valabil pentru toate fenomenele naturii, întrucît toate acestea pot fi numărate. Dar oare nu pot fi numărate şi multe alte lucruri? Locke** spune: „Numărul se aplică la oameni, îngeri, acţiuni, gînduri — la tot ceea ce ori există, ori poate

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

** Baumann, *op. cit*, vol. I, p. 409.

fi imaginat."[58] Leibniz* respinge concepția scolasticilor după care numărul ar fi inaplicabil la lucrurile incorporale și caracterizează numărul ca o anume figură incorporală, apărută prin reunirea unor lucruri absolut oarecari, de exemplu prin reunirea lui Dumnezeu, a unui înger, a unui om, a mișcării, care, toate la un loc, sînt patru. De aceea, crede el, numărul este ceva absolut universal, aparținînd metafizicii[59]. Într-un alt pasaj**, el spune: „Ceea ce nu are forță și putere nu poate fi cîntărit; ceea ce nu are părți nu poate avea vreo măsură; dar nu există nimic ce nu ar admite numărul. Așadar, numărul este, ca să spunem așa, figura metafizică."[60]

Ar fi într-adevăr uimitor dacă o proprietate abstrasă din lucrurile exterioare ar putea fi transpusă fără vreo modificare de sens asupra unor evenimente, reprezentări și concepte. Ar fi ca și cum am vrea să vorbim despre un eveniment fuzibil, o reprezentare albastră, un concept sărat sau o judecată tare.

Este absurd ca ceea ce este nesenzorial să manifeste ceva ce prin însăși natura sa este senzorial. Atunci cînd privim o suprafață albastră, obținem o impresie specifică ce corespunde cuvîntului „albastru"; această impresie o recunoaștem iarăși atunci cînd contemplăm o altă suprafață albastră. Dacă am presupune, în mod analog, că atunci cînd privim un triunghi, există ceva senzorial care corespunde cuvîntului „trei", ar trebui să regăsim acest element senzorial și în cazul a trei concepte; așadar, ceva non-senzorial ar avea în sine însăși ceva senzorial. Fără îndoială, putem admite că o impresie senzorială de un anume gen corespunde cuvîntului „triunghiular", dar atunci acest cuvînt trebuie luat

* Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 56.

** *Op. cit.*, p. 2.

ca un întreg indivizibil[61]. Noi nu vedem în mod imediat pe treiul de acolo; în schimb vedem ceva ce poate declanşa o activitate intelectuală care conduce la o judecată în cadrul căreia intervine numărul 3.[62] Căci, într-adevăr, cum ajungem să percepem, de pildă, numărul figurilor silogistice stabilite de Aristotel? Le percepem cu ochii? Vedem, cel mult, anumite semne care reprezintă aceste figuri de raţionament, dar nu le vedem pe acestea însele. Cum s-ar putea să vedem numărul acestora, dacă ele însele rămîn invizibile? Dar poate că cineva îşi închipuie că este de ajuns să vedem semnele; numărul lor este identic cu numărul figurilor silogistice. Dar cum ajungem să ştim acest lucru? Pentru aceasta se cere ca noi să fi stabilit deja într-un alt mod ultimul număr. Sau poate că propoziţia „numărul figurilor silogistice este patru" constituie doar o altă expresie pentru „numărul semnelor figurilor silogistice este patru"? Cîtuşi de puţin! Despre semne nu trebuie să afirmăm nimic; nimeni nu vrea să audă ceva despre ele, în cazul cînd o proprietate a acestora nu manifestă totodată o proprietate a ceea ce ele desemnează[63]. Totodată, întrucît unul şi acelaşi lucru poate fi simbolizat în diferite moduri, fără ca prin aceasta să păcătuim împotriva logicii, nici nu se mai cere ca numărul semnelor să coincidă cu numărul celor desemnate.

§ 25. În timp ce pentru Mill numărul constituie ceva de ordin fizic, pentru Locke şi Leibniz el subzistă numai în idee. E adevărat că, după cum spune Mill*, două mere sînt fizic distincte de trei mere, la fel cum doi cai sînt fizic distincţi de un singur cal, constituind în mod vizibil şi tangibil un fenomen distinct**. Dar putem oare conchide pe această

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

** Strict vorbind, ar trebui să adăugăm: cu condiţia ca el să fie în genere un fenomen. Dacă însă cineva are un cal în Germania

bază că însuşirea de a fi doi, însuşirea de a fi trei constituie ceva de ordin fizic? Una pereche de ghete poate constitui acelaşi fenomen vizibil şi tangibil ca şi d o u ă g h e t e. Avem aici o diferenţă de număr care nu corespunde unei diferenţe fizice[64]; într-adevăr, d o i şi u n a p e r e c h e nu sînt nicidecum identice, cum Mill pare să-şi închipuie într-un mod atît de ciudat. Şi, în sfîrşit, cum este cu putinţă ca două concepte să fie fizic distincte de trei concepte?

Aşa cum spune Berkeley*: „Trebuie să avem în vedere că numărul nu este ceva fix şi stabilit, nu este existent real în lucrurile înseşi. El este întru totul o creaţie a cugetului care priveşte fie o idee în sine, fie o combinaţie de idei căreia îi dă un nume, făcînd-o astfel să treacă drept o unitate. În funcţie de modul variat în care cugetul combină ideile sale, variază şi unitatea, iar aşa cum variază unitatea, variază şi numărul, care este numai o colecţie de unităţi. Spunem că o fereastră este una, un horn este unul; şi totuşi o casă care are multe ferestre şi multe hornuri este una iar multe case ajung să facă un oraş."[65]

Este numărul ceva subiectiv?[66]

§ 26. Această orientare de idei poate conduce cu uşurinţă la considerarea numărului drept ceva subiectiv. S-ar părea că modul în care numărul apare înăuntrul nostru ar putea oferi o explicaţie a naturii sale. Am ajunge atunci la o investigaţie de ordin psihologic. Într-adevăr, iată ce afirmă Lipschitz în acest sens**:

şi unul în America (şi nu mai are un alt cal), atunci el posedă doi cai. Aceştia nu formează însă un fenomen; numai fiecare dintre aceşti cai în parte ar putea fi astfel caracterizat.

* Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 428.

** *Lehrbuch der Analysis*, p. 1. Pornesc de la premisa că Lipschitz are în vedere un fenomen interior.

„Acel ce doreşte să cuprindă un ansamblu de lucruri va începe cu un anumit lucru determinat şi va continua prin a adăuga mereu cîte un lucru nou celor anterioare." Această caracterizare pare a fi mult mai adecvată pentru descrierea modului în care căpătăm, să spunem, intuiţia unei constelaţii decît pentru formarea numărului. Intenţia de a cuprinde un ansamblu este irelevantă, căci cu greu s-ar putea spune că o turmă devine mai uşor de cuprins dacă ştim din cîte capete este alcătuită.

O asemenea descriere a proceselor lăuntrice care precedă emiterea unei judecăţi numerice nu poate în nici un caz — nici măcar într-un context mai adecvat — să înlocuiască o definiţie propriu-zisă a conceptului. Ea nu va putea fi invocată niciodată în demonstrarea unei propoziţii aritmetice; ea nu ne permite să aflăm vreo proprietate a numerelor. Într-adevăr, numărul nu este un obiect al psihologiei sau un produs al fenomenelor psihice mai mult decît Marea Nordului, să spunem[67]. Obiectivitatea Mării Nordului nu este afectată cu nimic de faptul că putem decide în mod arbitrar care parte a suprafeţei totale acoperită de apă a Pămîntului o vom delimita spre a-i atribui numele „Marea Nordului". Acesta nu este un motiv care să ne facă să cercetăm Marea Nordului prin metode ale psihologiei. Tot astfel, numărul este şi el ceva obiectiv. Spunînd: „Marea Nordului are o suprafaţă de 10 000 de mile pătrate", noi nu ne referim nici prin „Marea Nordului", nici prin „10 000" la o stare sau la un fenomen din forul nostru lăuntric, ci, dimpotrivă, afirmăm ceva absolut obiectiv, ceva independent de reprezentările noastre şi de alte lucruri de acelaşi gen. Dacă cu un alt prilej am vrea să delimităm într-un mod diferit marginile Mării Nordului sau să înțelegem altceva prin „10 000", conţinutul care înainte era adevărat nu ar deveni prin aceasta fals; dar locul unui conţinut adevărat l-ar putea lua un conţinut fals, ceea ce nu anulează însă în nici un caz adevărul primului.

Atunci cînd un botanist indică numărul petalelor unei flori, el înţelege să afirme ceva tot atît de factual ca atunci cînd el indică culoarea aceleiaşi flori[68]. Nici una dintre aceste caracteristici nu depinde mai mult decît cealaltă de bunul nostru plac. Aşadar, o anumită asemănare între număr şi culoare există, dar ea nu rezidă în faptul că ambele pot fi percepute senzorial în lucrurile exterioare, ci în faptul că ambele sînt obiective.

Eu fac o distincţie între ceea ce este obiectiv şi ceea ce este imediat sesizabil, spaţial sau real. Axa Pămîntului şi centrul de gravitate al sistemului solar sînt obiective, dar eu n-aş spune că sînt reale, aşa cum real este Pămîntul însuşi. Vorbim adesea despre ecuator ca despre o linie imaginară; ar fi însă fals să spunem că este o linie imaginată; ea nu provine din gîndire, nu este rezultatul unui proces psihic, gîndirea nu face decît să o recunoască, să o conceapă ca atare. Dacă a fi recunoscut ar însemna a fi generat, atunci nu am putea afirma nimic pozitiv despre ecuator, referitor la perioada care precedă această pretinsă geneză[69].

Potrivit lui Kant, spaţiul aparţine aparenţei [fenomenalităţii]. S-ar putea ca altor fiinţe raţionale spaţiul să li se înfăţişeze cu totul altfel decît ni se înfăţişează nouă. Mai mult, nu putem şti nici măcar dacă spaţiul îi apare unui om la fel cum îi apare altuia; într-adevăr, noi nu putem pune intuiţia spaţială a unui om lîngă intuiţia altuia, spre a le compara. Şi totuşi, aici este conţinut ceva obiectiv; toţi recunosc aceleaşi axiome geometrice, fie şi numai prin faptă, şi sînt obligaţi la aceasta spre a se orienta în univers[70]. Obiectiv aici este elementul legic, conceptual, judicabil, care se lasă exprimat în cuvinte[71]. Ceea ce este pur intuitiv nu este comunicabil. Spre a clarifica acest punct, să ne imaginăm două fiinţe raţionale care pot intui numai proprietăţile şi relaţiile proiective: situarea a trei puncte pe o dreaptă, a patru puncte într-un plan şi aşa mai departe; ceea ce uneia îi apare ca

punct poate să-i apară alteia drept plan, și viceversa. Ceea ce pentru una dintre ființe este linia care unește două puncte poate fi pentru cealaltă linia după care se intersectează două plane, și așa mai departe, potrivit aceleiași corespondențe duale. În aceste condiții, cele două ființe raționale s-ar putea înțelege foarte bine între ele, fără a deveni vreodată conștiente de deosebirea dintre intuițiile lor, întrucît în geometria proiectivă orice teoremă are duala sa; divergențele de evaluare estetică[72] nu ar constitui un indiciu cert. În privința tuturor teoremelor geometrice, cele două ființe raționale s-ar găsi în deplin acord, numai că fiecare ar traduce altfel cuvintele în intuiții proprii. Cuvîntului „punct", de exemplu, una din ființe i-ar asocia o intuiție, iar cealaltă o altă intuiție. Așadar, putem susține mai departe că pentru cele două ființe raționale acest cuvînt semnifică ceva obiectiv, numai că nu este permis să înțelegem prin această semnificație elementul specific al intuițiilor lor. Iar în acest sens axa Pămîntului este de asemenea obiectivă[73].

De obicei, „alb" ne face să ne gîndim la o anumită senzație care, natural, este întru totul subiectivă; dar, după părerea mea, în însăși vorbirea obișnuită se manifestă adesea un sens obiectiv. Spunînd că zăpada este albă, avem intenția să exprimăm o însușire obiectivă pe care o constatăm la lumina obișnuită a zilei prin intermediul unei anumite senzații. Dacă asupra zăpezii cade o lumină colorată, în procesul judecării vom lua în considerare acest fapt. Vom spune, bunăoară: zăpada *apare* acum roșie, dar ea *este* albă. Pînă și daltonistul poate vorbi despre roșu și verde, cu toate că în senzațiile sale el nu distinge aceste culori. El ajunge să recunoască distincția datorită faptului că alții o fac sau, eventual, pe baza unui experiment fizic. Așadar, adesea nici termenii pentru culori nu desemnează senzația noastră subiectivă, despre care nu putem ști dacă concordă cu senzația altcuiva — este evident, într-adevăr, că folosirea unei aceleiași

denumiri nu oferă nici o garanție în acest sens —, ci desemnează o însușire obiectivă. Înțeleg deci prin obiectivitate o independență față de senzația, intuiția și imaginația noastră, o independență față de formarea unor imagini lăuntrice pe baza rememorării senzațiilor anterioare, dar nu o independență față de rațiune; într-adevăr, a răspunde la întrebarea ce sînt lucrurile independent de rațiune ar însemna să judecăm fără a judeca, să spălăm un lucru fără să-l udăm[74].

§ 27. Din acest motiv, nu mă pot declara de acord nici cu Schloemilch*[75] care afirmă că numărul este reprezentarea poziției unui obiect înăuntrul unui șir**. Dacă numărul ar fi o reprezentare, atunci aritmetica ar fi psihologie.

---

* *Handbuch der algebraïschen Analysis*, p. 1.

** Împotriva acestei afirmații se mai poate obiecta că, dacă este așa, ar trebui întotdeauna să avem una și aceeași reprezentare asupra poziției ori de cîte ori intervine unul și același număr, ceea ce este evident fals. Dacă autorul ar fi vrut să înțeleagă prin reprezentare o idee obiectivă, atunci considerațiile mele de mai jos ar fi fost lipsite de obiect; dar în acel caz ce deosebire ar mai exista între reprezentarea unei poziții și poziția însăși?

Reprezentarea în sens subiectiv ascultă de legile psihologice ale asociației; ea are o natură senzorială, imagistică. Reprezentarea în sens obiectiv aparține logicii și este în esență nesenzorială, deși cuvîntul care desemnează o reprezentare obiectivă poartă adesea cu sine și o reprezentare subiectivă, care nu constituie însă semnificația sa[76]. Adesea, reprezentarea subiectivă diferă, după cum se poate dovedi, de la un om la altul, pe cînd cea obiectivă este aceeași pentru toți. Reprezentările obiective se pot împărți în obiecte și concepte. Pentru a evita orice confuzie, voi folosi cuvîntul „reprezentare" numai în sensul subiectiv. Asociind acestui cuvînt ambele semnificații, Kant a conferit doctrinei sale o coloratură eminamente subiectivă, idealistă, îngreunînd astfel descifrarea adevăratei sale opinii. Distincția trasată aici este tot atît de întemeiată ca și aceea dintre logică și psihologie. Ar fi de dorit ca acestea să fie întotdeauna separate cît se poate de riguros!

Dar ea este tot atît de puțin psihologie pe cît este astronomia! La fel cum aceasta din urmă nu studiază reprezentările planetelor, ci înseşi aceste planete, tot astfel nici obiectul aritmeticii nu este o reprezentare. Dacă numărul doi ar fi o reprezentare, ar fi mai întîi numai propria mea reprezentare. Reprezentarea pe care o are altcineva este deja, luată ca atare, o altă reprezentare. Am putea avea atunci milioane întregi de numere doi. Ar trebui să spunem: doi al meu, doi al tău, un număr doi, toate numerele doi. Dacă acceptăm reprezentări latente sau inconştiente, am avea de asemenea numere doi inconştiente care ulterior ar redeveni conştiente. Pe măsura apariției unor noi adulți ar apărea mereu alți doi, şi cine ştie dacă de-a lungul mileniilor aceştia nu s-ar schimba pînă acolo încît doi ori doi să facă cinci! Dar, în pofida acestui fapt, ar fi îndoielnic să existe, aşa cum se consideră de obicei, infinit de multe numere. Poate că în acest caz 10^{10} va fi fiind un semn gol, nici o ființă neavînd vreo reprezentare corespunzătoare acestui nume.

Iată deci la ce rezultate bizare ajungem dacă explicităm cît de cît ideea că numărul ar fi o reprezentare. Ajungem la concluzia că numărul nu este nici spațial, nici fizic, în genul grămezilor de pietricele şi turte dulci ale lui Mill, după cum nu este subiectiv ca reprezentările, ci este nesenzorial şi obiectiv. Temeiul obiectivității nu poate să rezide în impresia senzorială care, ca afect al cugetului nostru, este integral subiectiv, ci, atîta cît pot vedea eu, rezidă numai în rațiune.

Ar fi uimitor ca cea mai exactă dintre toate ştiințele să se sprijine pe o psihologie care îşi mai dibuie încă drumul.

Numărul ca mulțime

§ 28. Anumiți autori definesc numărul ca pe o mulțime, multitudine sau pluralitate. Unul din viciile acestei concepții constă în faptul că numerele 0 şi 1 sînt excluse din sfera

conceptului de număr[77]. Expresiile de mai sus sînt extrem de vagi: uneori, ele au o semnificație apropiată de cea a termenilor „grămadă", „grup", „agregat" — care sugerează o alăturare în spațiu — alteori ele sînt utilizate în aproape aceeași accepție ca și „număr", însă într-un mod mai imprecis. De aceea, o analiză a conceptului de număr nu este de găsit într-o definiție de acest gen. Formarea numărului pretinde — după Thomae*[78] — ca mulțimilor diferite de obiecte să li se confere denumiri diferite. Prin aceasta se are în vedere, evident, o determinare mai precisă a acelor mulțimi de obiecte, determinare pentru care conferirea denumirilor constituie numai un semn exterior. Problema constă însă în a ști ce fel de determinare intră în joc. Este evident că ideea de număr nu ar apărea dacă în loc de „3 stele", „3 degete", „7 stele" am vrea să introducem denumiri în care nu s-ar putea detecta părți componente comune. Chestiunea nu este de a da în genere nume, ci de a desemna ca atare ceea ce ține aici de număr. Dar pentru aceasta se cere ca ceea ce ține de număr să fie recunoscut în specificitatea sa.

Totodată, trebuie să avem în vedere următoarea deosebire. Unii numesc număr o mulțime de lucruri sau obiecte; alții, printre care și Euclid**, îl definesc ca o mulțime de unități. Această din urmă expresie reclamă o discuție separată.

III. Opinii privitoare la unitate și unu[80]

Exprimă numeralul „unu" o proprietate a obiectelor?

§ 29. În definițiile pe care Euclid le dă la începutul Cărții a VII-a a *Elementelor*, el pare să desemneze prin cuvîntul

* *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 1.

** Cartea a VII-a a *Elementelor*, începutul: μονάς ἐστι, χαθ'ἥν ἒκαστον τῶν ὄντων ἕν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος[79]

„μονάς“ cînd un obiect ce trebuie numărat, cînd o proprietate a unui asemenea obiect, cînd numărul unu. Îl putem traduce peste tot prin „unitate“, dar numai pentru că însuşi acest cuvînt evocă toate aceste accepţii variate[81].

Schröder* spune: „Fiecare din lucrurile ce trebuie numărate se va numi unitate.“ Se pune întrebarea de ce mai întîi aducem lucrurile sub conceptul unităţii şi nu introducem pur şi simplu definiţia: „numărul este o mulţime de lucruri“, ceea ce ne-ar readuce iarăşi la concepţia de mai sus. În primul rînd, s-ar putea ca, acordînd lucrurilor denumirea de unităţi, să vrem a le determina mai exact, întrucît îl privim pe „unu“, potrivit formei sale lingvistice, ca pe un adjectiv, înţelegînd astfel „un oraş“ în acelaşi fel ca „om înţelept“[82]. În acest caz, o unitate ar fi un obiect căruia îi revine proprietatea „unu“ şi ea s-ar raporta la „unu“ la fel cum se raportează „un înţelept“ la adjectivul „înţelept“. Consideraţiilor care au fost aduse mai sus împotriva ideii că numărul ar fi o proprietate a lucrurilor li se mai adaugă aici cîteva argumente speciale. În primul rînd, ar fi surprinzător faptul că fiecare lucru în parte ar trebui să posede această proprietate. Ar fi de neînţeles de ce atunci în genere mai atribuim în mod expres vreunui lucru această proprietate. Aserţiunea că Solon este înţelept capătă un sens numai pentru că este posibil ca ceva să nu fie înţelept. Comprehensiunea unui concept descreşte atunci cînd extensiunea sa creşte; atunci cînd extensiunea devine atotcuprinzătoare, comprehensiunea se subţiază pînă la dispariţie[83]. Este greu de crezut că limba ar ajunge să făurească un adjectiv ce nu ar contribui cu nimic la definirea mai precisă a unui obiect[84].

Dacă „un om“ ar putea fi interpretat în acelaşi mod ca „om înţelept“, ar trebui să admitem că „unu“ poate fi apli-

---

* *Op. cit.*, p. 5.

cat şi în calitate de predicat, astfel încît să putem spune „Solon a fost unul" la fel cum putem spune „Solon a fost înţelept". Dar, deşi pe prima dintre aceste două expresii o putem întîlni într-adevăr, luată în sine ea nu este inteligibilă. Ea poate să însemne, de exemplu: „Solon a fost unul dintre înţelepţi", atunci cînd putem completa cu „dintre înţelepţi" expresia citată, pe baza contextului în care ea apare. Dar, după toate aparenţele, cînd este luat în mod izolat „unu" nu poate fi predicat*. În cazul pluralului aceasta iese şi mai clar în evidenţă. În timp ce „Solon a fost înţelept" şi „Tales a fost înţelept" se pot concentra în „Solon şi Tales au fost înţelepţi", nu putem spune „Solon şi Tales au fost unu". Dar această imposibilitate nu s-ar putea întrevedea pe baza concepţiei discutate, de vreme ce „unu" ar fi, în aceeaşi măsură ca şi „înţelept", o proprietate atît a lui Solon cît şi a lui Tales.

§ 30. În aceeaşi ordine de idei se poate observa că nimeni nu a fost în măsură să dea o definiţie a proprietăţii „unu". Atunci cînd Leibniz** spune: „Este unu ceea ce noi concepem printr-un act al intelectului", el defineşte „unu" în mod circular. Şi oare nu am putea concepe şi multiplul printr-un singur act al intelectului? Leibniz admite aceasta în cadrul aceluiaşi pasaj. La fel, Baumann*** spune că „este unu ceea ce noi concepem ca unu", şi continuă: „Ceea ce luăm ca punct sau nu admitem a fi mai departe divizat

---

* În anumite expresii, „unu" este utilizat în accepţii care par să o contrazică pe cea de mai sus, dar o analiză mai amănunţită ne permite să constatăm că un termen conceptual necesită o întregire, sau că „unu" nu este folosit ca numeral, că ceea ce se intenţionează a se aserta nu este unicitatea, ci însuşirea de a fi unitar.

** Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 2; ed. Erdmann, p. 8.

*** *Op. cit.*, vol. II, p. 669.

este privit de noi în calitate de unu; însă pe orice unu al intuiției exterioare, atît al celei pure cît și al celei empirice, îl putem privi și ca pe o multiplicitate. Orice reprezentare este una, dacă o delimităm în raport cu o altă reprezentare, însă cînd este luată în sine înăuntrul ei putem distinge de asemenea o multiplicitate." În felul acesta, orice delimitare intrinsecă a conceptului dispare și totul este făcut să depindă de modul nostru de a vedea lucrurile[85]. Întrebăm încă o dată: ce sens poate avea atribuirea proprietății „unu" unui obiect oarecare, de vreme ce, potrivit modului nostru de a vedea lucrurile, fiecare obiect poate să fie și poate să nu fie unu? Cum este cu putință ca o știință care își revendică faima tocmai de la claritatea și precizia ei maximă să se sprijine pe un concept atît de confuz?

§ 31. Or, deși Baumann* întemeiază conceptul de unu pe intuiția interioară, el specifică totuși — pasajul citat mai sus — indivizibilitatea și delimitarea ca note ale conceptului în cauză. Dacă aceste note ar conveni într-adevăr conceptului, ar trebui să ne așteptăm ca pînă și animalele să poată avea o anumită idee asupra unității. E oare cu putință ca un cîine care privește spre Lună să aibă o idee, oricît de indistinctă, despre ceea ce noi semnificăm prin cuvîntul „unu"? E greu de admis! Și totuși, nu încape îndoială că el distinge obiecte individuale: alt cîine, stăpînul său, piatra cu care se joacă îi apar tot atît de delimitate, de subzistente în sine, de indivizate precum ne apar și nouă. Negreșit, el va sesiza o deosebire între a trebui să se apere împotriva mai multor cîini și a trebui să se apere împotriva unuia singur, dar în cazul de față avem ceea ce Mill numește diferența fizică. Problema care se ridică în mod deosebit aici este dacă un cîine e conștient, fie cel puțin într-un mod foarte

* *Ibidem.*

confuz, de elementul comun, exprimat de noi prin cuvîntul „unu“, al situaţiilor în care, bunăoară, este muşcat de un cîine mai mare şi, respectiv, fugăreşte el o pisică. După mine, aceasta este improbabil. De aceea, trag concluzia că ideea unităţii, spre deosebire de ceea ce crede Locke*, nu este sugerată intelectului de orice obiect din afara noastră şi de orice idee dinăuntrul nostru[86], ci ea ajunge să fie cunoscută de noi prin mijlocirea facultăţilor intelectuale superioare care ne deosebesc pe noi de animale. Ca atare, individualitatea, delimitarea şi alte proprietăţi ale lucrurilor pe care animalele le percep tot atît de bine ca şi noi nu pot constitui elementul esenţial al conceptului nostru.

§ 32. Şi totuşi, o anumită conexiune poate fi întrevăzută. Ea este indicată de limbă, atunci cînd din „unu“ ea derivă „unitar“, „unit“. Un lucru este cu atît mai apt de a fi privit ca un obiect distinct, cu cît trăsăturile sale distinctive ies mai mult în relief în raport cu trăsăturile distinctive ale mediului ambiant şi cu cît coeziunea sa interioară precumpăneşte asupra conexiunii sale cu mediul ambiant. „Unitar“ semnifică deci o proprietate ce ne permite să detaşăm lucrul pe care îl gîndim de mediul său ambiant şi să-l considerăm ca ceva în sine. Aşa se şi explică de ce cuvîntul francez „uni“ ajunge să însemne „uniform“, „continuu“. La rîndul său, cuvîntul „unitate“ este întrebuinţat într-un mod asemănător, atunci cînd vorbim despre unitatea politică a unei ţări, despre unitatea unei opere de artă**. Dar, în acest sens, „unitate“ ţine mai puţin de „unu“ decît de „unit“ sau „unitar“. Într-adevăr, atunci cînd spunem că

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 40.

** Cu privire la istoricul cuvîntului „unitate“, a se vedea Eucken, *Geschichte der philosophischen Terminologie*, pp. 122–123, 136, 220.

Pămîntul are *un* satelit, intenția noastră nu este să arătăm că acesta este un satelit delimitat, subzistent în mod autonom, indivizat, ci să marcăm contrastul cu ceea ce se întîmplă în cazurile lui Venus, Marte sau Jupiter. Sub raportul delimitării și indivizibilității, sateliții lui Jupiter sînt pe deplin comparabili cu cel al nostru, ei fiind, în acest sens, tot atît de unitari.

§ 33. Unii autori ridică indivizarea la rang de indivizibilitate. G. Köpp* numește individ orice lucru cunoscut prin simțuri ori într-un alt mod și care este gîndit ca indecompozabil și ca subzistent prin sine însuși, iar apoi, pe indivizii care trebuie numărați, îi numește unu-uri; în mod evident, „unu" este luat aici în sensul de unitate. Baumann își justifică părerea sa că lucrurile exterioare nu ar reprezenta unități stricte, prin considerentul că avem libertatea de a le privi ca multitudini, drept care el prezintă și indecompozabilitatea ca un criteriu al unității stricte. Ridicarea coeziunii interne la rangul de absolut urmărește, evident, dobîndirea unui criteriu al unității care să nu mai depindă de un mod sau altul de a înțelege lucrurile. Tentativa eșuează datorită faptului că în acest caz nu ne mai rămîne aproape nimic ce ar mai putea fi numit unitate și numărat. De aceea, ne vedem siliți să batem imediat în retragere, adoptînd ca criteriu nu indecompozabilitatea însăși, ci numai faptul de a fi gîndit ca indecompozabil. Însă atunci ajungem din nou la concepția ezitantă de mai sus. Dar dacă gîndim lucrurile altfel decît sînt ele în realitate, dobîndim cel puțin vreun avantaj? Nicidecum! Dintr-o ipoteză falsă pot decurge concluzii false. Dar dacă din indecompozabilitate nu vrem a infera vreo concluzie, în ce mai poate consta utilitatea ei? Dacă putem să renunțăm și chiar trebuie să renunțăm fără

* *Schularithmetik*, pp. 5–6, Eisenach, 1867.

prejudicii la rigoarea conceptului avut în vedere, pentru ce am mai căutat această rigoare? Dar poate că nu ni se cere altceva decît să nu gîndim această decompozabilitate. Ca şi cum lipsa de gîndire ne-ar face să cîştigăm ceva![87] Există însă cazuri cînd nu mai putem evita în nici un chip să gîndim decompozabilitatea, atunci cînd raţionamentul se sprijină pe însuşi caracterul compus al unităţii. Fie, de exemplu, problema: dacă o zi are 24 de ore, cîte ore sînt în 3 zile?

Sînt oare identice unităţile?

§ 34. Aşadar, orice tentativă de a defini proprietatea „unu" eşuează, încît ne vedem obligaţi să renunţăm la a vedea în desemnarea lucrurilor ca unităţi o determinare mai lămuritoare. Ne reîntoarcem iarăşi la întrebarea noastră: de ce mai spunem că lucrurile sînt unităţi, de vreme ce „unitate" ar fi numai un alt nume pentru „lucru", de vreme ce toate lucrurile sînt unităţi sau pot fi concepute ca atare?[88] E. Schröder* vede explicaţia în identitatea care este prescrisă obiectelor supuse numărării. — Dar, în primul rînd e de neînţeles de ce cuvintele „lucru" şi „obiect" nu ar putea să indice aceasta la fel de bine. Mai departe se pune întrebarea: de ce atribuim obiectelor numărării însuşirea de a fi identice? Această identitate li se atribuie numai, sau ele sînt realmente identice? În orice caz, două obiecte *nu* sînt niciodată absolut identice. Pe de altă parte, aproape întotdeauna putem găsi, desigur, un criteriu potrivit căruia două obiecte oarecare concordă între ele[89]. Dar astfel am ajuns din nou la modul arbitrar de a concepe lucrurile, în cazul cînd, păcătuind împotriva adevărului, nu

* *Op. cit.*, p. 5.

vrem să atribuim lucrurilor o identitate mai largă decît aceea care le revine în mod real. Şi, într-adevăr, mai mulţi autori pretind că unităţile sînt identice, fără nici o limitare. Hobbes* afirmă că „numărul în sensul absolut presupune în matematică unităţi identice între ele, din care este alcătuit“[90]. Hume** consideră părţile componente ale cantităţii şi numărului ca absolut similare[91]. Thomae*** numeşte unitate un individ al mulţimii şi adaugă: „unităţile sînt identice între ele“. Cu egal sau chiar cu mai mult temei s-ar putea spune: indivizii mulţimii sînt distincţi. Ce poate însemna însă pentru număr această pretinsă identitate? Proprietăţile prin care lucrurile se disting între ele sînt indiferente şi irelevante în ceea ce priveşte numărul acestora, şi tocmai de aceea vrem să le ţinem deoparte. Numai că, în maniera sus-menţionată, nu putem reuşi. Dacă, aşa cum pretinde Thomae, „se face abstracţie de particularităţile indivizilor unei mulţimi de obiecte“, „ori de cîte ori se consideră lucruri separate, se trec cu vederea caracteristicile prin care lucrurile se diferenţiază între ele“, atunci — în pofida părerii lui Lipschitz — ceea ce ne rămîne nu este „conceptul de număr al lucrurilor considerate“, ci un concept general căruia i se subsumează acele lucruri[92]. Lucrurile înseşi nu pierd prin aceasta nici una din trăsăturile lor specifice. Dacă, de exemplu, eu fac abstracţie de proprietăţile prin care o pisică albă şi o pisică neagră se deosebesc între ele, obţin, probabil, conceptul „pisică“. Dacă le strîng acum pe amîndouă sub acest concept şi le numesc, să spunem, unităţi, pisica albă rămîne tot albă iar cea neagră tot neagră. Chiar dacă nu mă gîndesc la culorile lor sau nu-mi propun să trag vreo

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 242.

** Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 568.

*** *Op. cit.*, p. 1.

concluzie pe baza acestei deosebiri a lor, pisicile nu devin incolore, ci rămîn la fel de distincte ca înainte. Ce-i drept, conceptul „pisică“ la care s-a ajuns prin abstracție nu mai conține particularitățile, însă tocmai de aceea el este numai unul[93].

§ 35. Lucruri diferite nu pot fi făcute identice prin intermediul unor metode pur conceptuale; dar dacă aceasta ar fi posibil, atunci nu am mai avea o pluralitate de lucruri, ci un lucru și numai unul. Într-adevăr, așa cum spune Descartes*, numărul — sau mai curînd pluralitatea — lucrurilor provine din diversitatea lor[94]. E. Schröder** afirmă pe drept cuvînt: „Cererea de a număra lucrurile poate fi emisă în mod rațional numai acolo unde obiectele în cauză apar în mod clar ca distincte, de exemplu ca separate în spațiu și timp și delimitate totodată între ele.“ Într-adevăr, de multe ori asemănarea prea mare a obiectelor, de exemplu a șipcilor unui gard, îngreunează numărătoarea. Deosebit de pregnante în acest sens sînt afirmațiile lui W. Stanley Jevons***: „Numărul nu este decît un alt nume pentru *diversitate*. Identitatea exactă este unitate, iar o dată cu diferența apare pluralitatea.“ Și mai departe (la p. 157): „S-a afirmat adesea că unitățile sînt unități prin faptul că sînt perfect similare între ele; dar, deși în anumite privințe pot fi perfect asemănătoare, ele trebuie să se deosebească cel puțin într-un punct, altfel ar fi incapabile de pluralitate. Dacă trei monede ar fi într-atîta de asemănătoare încît să ocupe același loc în același timp, ele nu ar mai fi trei monede, ci una.“

---

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 103.

** *Op. cit.*, p. 3.

*** *The Principles of Science*, 3d. ed., p. 156.

§ 36. Dar, aşa cum se constată imediat, concepţia după care unităţile sînt diferite se ciocneşte de dificultăţi noi. Jevons explică: „O unitate este un obiect oarecare al gîndirii care poate fi distins de orice alt obiect tratat ca unitate în cursul aceleiaşi probleme. Aici unitatea este definită prin intermediul ei însăşi iar precizarea „care poate fi distins de orice alt obiect" nu cuprinde o specificare mai adecvată, deoarece este subînţeleasă. Despre un obiect spunem că este un altul, tocmai şi numai pentru că îl putem deosebi de alte obiecte. În continuare, Jevons* spune: „Ori de cîte ori utilizez simbolul 5, eu înţeleg de fapt

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

şi este perfect clar că fiecare dintre aceste unităţi este distinctă de oricare alta. Dacă ar fi de dorit, le-aş putea nota astfel:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''."$$

În mod cert, notarea lor diferită este de dorit, o dată ce sînt diferite; altfel s-ar crea o mare confuzie. Dacă însăşi poziţia deosebită în care apare 1 ar trebui să semnifice o deosebire, ar trebui stipulată în acest sens o regulă ce nu admite excepţii, întrucît în caz contrar nu am şti niciodată dacă 1 + 1 trebuie să însemne 2 sau 1. Dar atunci ar trebui să respingem egalitatea 1 = 1 şi ne-am găsi puşi în situaţia dificilă de a nu putea nota vreodată acelaşi lucru pentru a doua oară. Evident, această situaţie e inacceptabilă. Dacă însă vrem să atribuim semne distincte unor lucruri distincte este greu de văzut pentru ce mai păstrăm o parte componentă comună a acestor semne şi de ce, în loc de a scrie

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''',$$

* *Op. cit.*, p. 162.

nu scriem mai curînd

$$a + b + c + d + e.$$

Într-adevăr, identitatea am pierdut-o oricum, iar indicarea unei anumite asemănări nu serveşte la nimic. În felul acesta, unu ne scapă din mîini; ne rămîn obiectele cu toate particularităţile lor. Simbolurile

$$1', 1'', 1'''$$

sînt o expresie grăitoare a perplexităţii noastre: ne trebuie identitatea, drept care avem notaţia 1; ne trebuie diferenţa — drept care avem notaţia cu indici, dar care, din păcate, anulează identitatea.

§ 37. Aceeaşi dificultate o întîlnim şi la alţi autori. Locke* spune: „Repetînd... ideea unităţii şi unind-o cu altă unitate, ne formăm despre ea o idee colectivă desemnată prin cuvîntul «doi». Şi acel ce poate să facă acest lucru şi să înainteze, adăugînd mereu cîte o unitate la ultima idee colectivă pe care a avut-o despre un anumit număr şi dîndu-i o denumire, acela poate să calculeze ... "[94] Leibniz** defineşte numărul ca 1 şi cu 1 şi cu 1, sau ca unităţi. Hesse*** scrie: „Dacă cineva îşi poate forma vreo idee despre unitatea care în algebră se exprimă prin simbolul 1..., el poate să conceapă şi o a doua unitate la fel de justificată ca prima, iar apoi şi alte unităţi de acelaşi gen. Reunirea celei de-a doua cu prima într-un singur tot dă numărul 2."

În aceste afirmaţii trebuie reţinută relaţia în care se află semnificaţiile cuvintelor „unitate" şi „unu". Prin unitate, Leibniz înţelege un concept sub care cad acest unu şi acest

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, pp. 409–411.

** *Ibidem*, vol. II, p. 3.

*** *Vier Species*, p. 2.

unu şi acest unu, sau, aşa cum mai spunea el: „Abstrasul din unu este unitatea." Locke şi Hesse par să folosească unitate şi unu în una şi aceeaşi accepţie. În ultimă instanţă, Leibniz procedează la fel; într-adevăr, întrucît el numeşte *unum* pe fiecare dintre obiectele individuale care cad sub conceptul unităţii, acest cuvînt desemnează la el nu obiectul individual, ci conceptul sub care cad toate obiectele individuale.

§ 38. Pentru a evita orice confuzie, va fi indicat totuşi să distingem în mod strict între unitate şi unu. Noi folosim expresia „numărul unu" şi indicăm prin intermediul articolului hotărît un obiect individual determinat al investigaţiei ştiinţifice[95]. Nu există numere unu diferite, există unul singur. În 1 avem un nume propriu care în această calitate este tot atît de puţin susceptibil să primească pluralul ca „Friedrich cel Mare" sau „elementul chimic aur". Faptul că scriem 1 fără liniuţe care să marcheze diferenţele nu este o simplă întîmplare, iar notaţia nu este inexactă. St. Jevons ar scrie egalitatea

$$3 - 2 = 1$$

sub o formă ca:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

Ce rezultat ar avea însă

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')?$$

În nici un caz, nu $1'$. De aici urmează că, potrivit concepţiei sale, ar exista nu numai unu diferiţi, ci şi doi diferiţi etc.; într-adevăr, $1'' + 1'''$ nu ar putea fi reprezentat prin $1'''' + 1'''''$. De aici rezultă cît se poate de clar că numărul nu este un conglomerat de lucruri. Aritmetica ar înceta să existe dacă în locul numărului unu, care este întotdeauna acelaşi, am vrea să introducem lucruri distincte,

oricît de asemănătoare ar fi simbolurile acestora; ele nu ar putea fi făcute identice fără a se comite o eroare. Or, nu putem admite că tot ce aritmetica are mai profund este o notație eronată. Ca atare, este imposibil să-l privim pe 1 ca pe semnul unor obiecte diferite, ca semn pentru Islanda, Aldebaran, Solon şi altele. Absurditatea capătă o pregnanță maximă dacă vom considera cazul unei ecuații care admite trei rădăcini, şi anume 2, 5 şi 4. Dacă, urmîndu-l pe Jevons, vom scrie pentru 3

$$1' + 1'' + 1''',$$

și dacă prin $1'$, $1''$, $1'''$ înțelegem unități şi deci înțelegem prin ele, conform lui Jevons, obiectele considerate aici, atunci $1'$ va semnifica aici 2, $1''$ va semnifica 5 iar $1'''$ va semnifica 4. Dar atunci nu ar fi mai inteligibil ca în locul lui $1' + 1'' + 1'''$ să scriem

$$2 + 5 + 4?$$

Numai numele conceptuale pot avea plural[96]. Aşadar, atunci cînd vorbim despre „unităţi", acest cuvînt nu poate fi luat în accepţia numelui propriu „unu", ci numai în calitate de nume comun. Dacă „unitate" înseamnă „obiect de numărat", nu putem defini numărul ca unităţi. Dacă prin „unitate" se înţelege un concept care cuprinde în sine numărul unu şi numai pe acesta, pluralul nu are nici un sens şi încă o dată devine imposibil să definim numărul, împreună cu Leibniz, ca unităţi sau ca 1 şi 1 şi 1. Într-adevăr, dacă folosim „şi" ca în „Bunsen şi Kirchhoff", atunci 1 şi 1 şi 1 nu este 3, ci 1, la fel cum aur şi aur nu poate fi vreodată altceva decît aur. Semnul plus din

$$1 + 1 + 1 = 3$$

trebuie deci să fie interpretat altfel decît acel „şi", care contribuie la desemnarea unei colecții, a unei „idei colective"[97].

§ 39. Ne găsim astfel în fața următoarei dificultăți: Dacă vrem să generăm numărul prin cuprinderea laolaltă a unor obiecte distincte, ceea ce obținem este o multitudine în care obiectele sînt conținute cu tocmai acele proprietăți ale lor prin care se deosebesc între ele, iar aceasta nu este numărul. Dacă, pe de altă parte, încercăm să formăm numărul prin cuprinderea laolaltă a identicilor, rezultatul trece întotdeauna în unu și nu ajungem niciodată la o pluralitate.

Dacă prin 1 desemnăm fiecare din obiectele de numărat, comitem o eroare, întrucît unor lucruri distincte li se atribuie unul și același semn. Iar dacă îl înzestrăm pe 1 cu liniuțe distinctive, atunci el nu mai este aplicabil în aritmetică.

Cuvîntul „unitate" are darul de a camufla dificultatea; tocmai acesta este motivul — ce-i drept, inconștient — pentru care el este preferat în comparație cu cuvintele „obiect" și „lucru"[98]. Noi începem prin a spune că lucrurile de numărat sînt unități, acordînd astfel diversității ceea ce i se cuvine; după aceea, cuprinderea laolaltă, colectarea, adunarea, reunirea, adăugarea, sau cum mai vrem să-i spunem, trece în conceptul adunării aritmetice, iar termenul general „unitate" se transformă pe nesimțite în numele propriu „unu". În felul acesta se ajunge la identitate. Dacă la litera „ș" adaug litera „i", oricine va constata cu ușurință că ceea ce obțin nu este numărul 2. Dacă însă subsumez *ș* și *i* conceptului „unitate" și în loc de „*ș* și *i*" spun: „o unitate și încă o unitate" sau „1 și cu 1", sîntem gata să credem că am obținut astfel numărul 2. Această dificultate este atît de bine camuflată de cuvîntul „unitate", încît, negreșit, puțini ajung măcar să o bănuiască.

Aici Mill ar fi putut denunța în mod justificat o manipulare artificioasă a limbajului; într-adevăr, avem aici nu manifestarea exterioară a unui proces de gîndire, ci numai

răsfrîngerea iluzorie a acestuia. Aici căpătăm efectiv impresia că unor cuvinte goale de orice gînd li se atribuie o anumită forță misterioasă, întrucît distinctul, prin simplul fapt că i se spune unitate, este obligat să ajungă identic[99].

Încercări de a înlătura dificultatea

§ 40. Să examinăm acum unele idei care reprezintă încercări de depășire a acestei dificultăți, chiar dacă nu întotdeauna ele au fost întreprinse cu o conștiință pe deplin clară în această intenție.

În primul rînd, se poate face apel la o anumită proprietate a spațiului și timpului. Un punct al spațiului nu poate fi distins de un altul, atîta timp cît îl considerăm numai în sine, și același este cazul liniilor drepte, planelor, sau cazul corpurilor, ariilor și segmentelor congruente; toate acestea entități de un același gen pot fi distinse între ele numai ca existente în cadrul unui ansamblu, numai ca părți componente ale unei intuiții totale. Se pare deci că aici identitatea se combină cu discernabilitatea. În cazul timpului, situația este similară. Poate că tocmai de aceea Hobbes* consideră că identitatea unităților nu poate fi concepută altfel decît ca generată prin divizarea continuului[100]. La rîndul său, Thomae** spune: „Dacă ne reprezentăm o mulțime de indivizi sau de unități în spațiu și le numărăm în mod succesiv, ceea ce reclamă timp, încă mai rămîne ca o notă distinctivă a unităților — oricît am abstrage — poziția lor diferită în spațiu și succesiunea lor diferită în timp."

Împotriva unei asemenea concepții se ridică în primul rînd obiecția că, dacă ar fi așa, atunci numai ceea ce este

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 242.

** *Elementare Theorie der analyt. Functionen*, p. 1.

spaţial şi temporal ar fi numărabil. Încă Leibniz* a respins ideea scolasticilor după care numărul ar apărea prin simpla divizare a continuului şi nu ar putea fi aplicat la lucruri incorporale[101]. Baumann** relevă independenţa numărului faţă de timp. Conceptul de unitate poate fi gîndit, după acest autor, independent de timp. St. Jevons*** scrie: „Trei monede sînt trei monede, indiferent dacă le numărăm în mod succesiv sau le privim pe toate în mod simultan. În multe cazuri, nici spaţiul, nici timpul nu sînt temeiul diferenţei, numai calitatea pură intrînd în joc. Putem distinge, de exemplu, greutatea, inerţia şi duritatea aurului ca trei însuşiri, deşi nici una dintre acestea nu este înaintea alteia sau după alta, nu este în spaţiu sau în timp. Orice mijloc de discriminare poate fi o sursă a pluralităţii." — Aş adăuga că, dacă obiectele numărate nu se succedă în realitate, ci sînt numai numărate în mod consecutiv, timpul nu poate fi temeiul discriminării. Într-adevăr, pentru ca să poată fi numărate în mod consecutiv, trebuie să dispunem deja de anumite note distinctive. Timpul nu este decît o exigenţă psihologică a numărării, dar el nu are de-a face cu conceptul de număr[102]. Reprezentînd obiecte nespaţiale şi atemporale prin puncte spaţiale sau temporale, putem facilita eventual demersul numărării; dar în principiu este presupusă astfel aplicabilitatea conceptului de număr la ceva ce nu este de ordin spaţial sau temporal[103].

§ 41. Mai departe însă, în ipoteza că trecem cu vederea toate notele distinctive, cu excepţia celor de ordin spaţial şi temporal, reuşim oare într-adevăr să unim discernabilitatea şi identitatea? Cîtuşi de puţin! Nu ne-am apropiat nici

* Baumann, *op. cit.*, vol. II, p. 2.

** *Op. cit.*, vol. II, p. 668.

*** *The Principles of Science*, p. 157.

măcar cu un pas de soluție. Asemănarea mai mică sau mai mare a obiectelor nu contribuie cu nimic la rezolvarea problemei, de vreme ce pînă la urmă aceste obiecte trebuie să fie păstrate separate. Eu nu pot nota aici toate punctele individuale, liniile individuale etc. prin 1, tot aşa cum în considerațiile de ordin geometric eu nu le pot nota pe toate împreună prin A; şi într-un caz, şi în celălalt se cere să le distingem între ele. Numai luate în sine, fără a ține seama de relațiile lor spațiale, punctele spațiului sînt identice între ele. Dacă însă trebuie să le gîndesc împreună, sînt obligat să le consider în cadrul existenței lor spațiale comune, pentru ca să nu se contopească iremediabil în unul. Luate împreună, unele puncte pot forma eventual o figură oarecare, de exemplu în formă de stea, sau pot să se ordoneze într-un fel sau altul pe o dreaptă, iar segmente egale puse cap la cap pot forma un segment unic, sau pot fi complet separate. Configurațiile apărute în acest mod pot fi complet diferite, în timp ce numărul elementelor rămîne acelaşi. Dar atunci am avea şi aici diferite numere cinci, diferite numere şase ş.a.m.d. La fel, punctele timpului sînt separate prin intervale temporale scurte sau lungi, egale sau inegale. Toate acestea sînt relații care nu au absolut nimic de-a face cu numărul ca atare. În toate intervine un element special, deasupra căruia numărul în universalitatea lui se ridică cu mult. Pînă şi un moment individual are ceva cu totul specific prin care se diferențiază, să spunem, de un punct al spațiului şi din care nu mai rămîne nimic în cadrul conceptului de număr[104].

§ 42. Nici soluția de a înlocui ordinea spațială şi temporală printr-un concept mai general de şir nu-şi atinge țelul propus; într-adevăr, pozițiile obiectelor în cadrul unui şir nu pot constitui temeiul distingerii lor, întrucît ele trebuie să fi fost în prealabil distinse într-un fel sau altul, ca să se poată ordona în şir. O atare aranjare presupune întot-

deauna relații între obiecte, să spunem relații spațiale, temporale, logice sau intervale de sunete, sau oricare altele; asemenea relații ne conduc de la un obiect la altul, ele fiind legate în mod necesar de distingerea obiectelor.

Atunci cînd Hankel* spune că un obiect poate fi gîndit sau instituit o dată, de două ori sau de trei ori, avem aici, după cum se pare, o nouă încercare de a combina discernabilitatea cu identitatea lucrurilor ce urmează a fi numărate. Dar se poate constata imediat că nici această încercare nu este mai reușită; într-adevăr, reprezentările sau intuițiile unuia și aceluiași obiect trebuie să se diferențieze între ele, într-un fel sau altul, pentru a nu se topi într-un unu. Totodată, cred că avem dreptul să vorbim despre 45 milioane de germani fără a fi gîndit sau pus în prealabil de 45 milioane de ori un german obișnuit, ceea ce ar fi oarecum incomod[105].

§ 43. Probabil pentru a evita dificultățile întîmpinate atunci cînd, o dată cu St. Jevons, facem să se desemneze prin semnul 1 unul dintre obiectele numărate, E. Schröder vede în acest semn numai imaginea unui obiect. Rezultatul este că el explică numai semnul numărului, nu însuși numărul. Într-adevăr, el spune**: „Pentru a căpăta un semn capabil să exprime c î t e dintre aceste unități*** sînt date, ne îndreptăm atenția rînd pe rînd la cîte unul *de fiecare dată* și îl reprezentăm printr-o linioară verticală: 1 (un u n u); acești unu îi înșirăm unul lîngă altul, legîndu-i însă prin semnul + (plus), căci în caz contrar 111, de exemplu, s-ar citi în notația uzuală a numerelor ca o sută unsprezece. Căpătăm astfel un semn ca:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

* *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.

** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, p. 5 și urm.

*** Obiecte ce urmează a fi numărate.

a cărui structură poate fi descrisă spunînd:

Un număr natural este o sumă de mai mulți unu."

Reiese că pentru Schröder numărul este un semn.

Ceea ce exprimă acest semn, adică ceea ce pînă acum eu am numit număr, Schröder presupune că este deja cunoscut, dovadă cuvintele „cîte dintre acele unități sînt date". Prin cuvîntul „unu", el înțelege, de asemenea, semnul 1, nu semnificația acestuia[106]. El folosește mai întîi semnul + numai ca pe un mijloc exterior de legare, lipsit de orice conținut propriu; abia ulterior definește el adunarea. El ar fi putut spune mai succint: scriem unul lîngă altul tot atîtea semne 1 cîte obiecte de numărat avem și le legăm prin semnul +. Zero s-ar exprima prin faptul că nu scriem nimic.

§ 44. Pentru a nu introduce înăuntrul numărului notele distinctive ale lucrurilor, St. Jevons* face următoarea precizare: „Acum va fi ușor să ne formăm o idee clară asupra naturii abstracției numerice. Ea constă în a abstrage caracterul diferenței din care survine pluralitatea, reținînd pur și simplu faptul existenței sale. Atunci cînd vorbesc despre trei oameni nu sînt obligat să specific imediat notele prin care fiecare dintre aceștia poate fi distins de ceilalți doi. Aceste note trebuie să existe, dacă ei sînt într-adevăr trei oameni și nu unul și același, iar atunci cînd mă refer la ei ca la mai mulți eu presupun existența diferențelor cerute. Numărul abstract este deci forma vidă a diferenței."

Cum să înțelegem aceasta? Putem sau să facem abstracție de proprietățile distinctive ale lucrurilor, înainte de a le reuni într-un întreg, sau să formăm mai întîi un întreg și să facem apoi abstracție de natura diferențelor. Aplicînd primul procedeu nu am mai ajunge deloc să distingem lucrurile

---

* *Op. cit.*, p. 158.

și ca atare nu am mai putea reține nici faptul existenței diferențelor; Jevons pare să aibă în vedere al doilea procedeu. Eu nu cred însă că noi am putea ajunge în acest mod la numărul 10 000, întrucît nu sîntem în stare să cuprindem simultan atîtea diferențe și să reținem totodată faptul existenței lor; pe de altă parte, dacă le-am gîndi rînd pe rînd, numărul nu ar mai ajunge să fie încheiat[107]. E adevărat că numărarea decurge în timp; dar în felul acesta noi nu obținem numărul, ci doar îl determinăm. Și, de altfel, specificarea modalității de abstragere nu constituie o definiție[108].

Ce trebuie să se înțeleagă prin „forma vidă a diferenței"? Nu cumva o propoziție ca

„a este diferit de b",

unde *a* și *b* rămîn nedeterminate? Ar putea fi această propoziție numărul 2, să spunem? Oare propoziția

„Pămîntul are doi poli"

înseamnă același lucru ca

„Polul Nord este diferit de Polul Sud"?

Evident că nu. A doua propoziție ar putea avea loc fără ca prima să aibă loc, și viceversa[109]. În cazul numărului 1 000 vom avea deci

$$\frac{1\,000 \cdot 999}{1 \cdot 2}$$

de asemenea propoziții ce exprimă o diferență.

Afirmația lui Jevons își vădește în mod deosebit inadecvarea în cazul lui 0 și 1. De la ce vom face anume abstracție spre a ajunge, bunăoară, de la Lună la numărul 1? Prin abstragere căpătăm, de bună seamă, conceptele: satelit al Pămîntului, satelit al unei planete, corp ceresc fără lumină proprie, corp ceresc, corp, obiect. Dar 1 nu poate fi găsit în acest șir,

întrucît nu este un concept sub care ar putea să cadă Luna. În cazul lui 0 nici nu avem vreun obiect de la care procesul abstracției ar putea porni. Obiecția după care 0 și 1 nu sînt numere în același sens în care sînt 2 și 3 nu-și găsește loc. Numărul răspunde la întrebarea *cîți* și dacă, de exemplu, întrebăm: Cîți sateliți are această planetă? putem aștepta în egală măsură răspunsul 0 sau 1, ori răspunsul 2 sau 3, sensul întrebării rămînînd același. Fără îndoială, numărul 0 comportă ceva specific, și tot astfel numărul 1, dar aceasta este valabil în principiu pentru orice număr întreg; singura deosebire este că în cazul numerelor tot mai mari specificul lor devine tot mai puțin evident. Ar fi cu totul arbitrar să facem din aceasta o deosebire esențială. Ceea ce nu convine lui 0 sau 1 nu poate fi esențial pentru conceptul de număr.

În sfîrșit, acceptînd acest mod de apariție a numerelor nu înlăturăm nicidecum dificultatea de care ne-am ciocnit atunci cînd am considerat simbolizarea lui 5 prin

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.$$

Acest simbolism concordă cu ceea ce spune Jevons despre abstracția prin care formăm numerele; accentele indică tocmai faptul că există o diferență, fără a preciza însă natura ei. Dar simpla subzistență a diferenței este suficientă deja — după cum am văzut — pentru a genera, după cum crede Jevons, diferiți unu, diferiți doi, diferiți trei, ceea ce este incompatibil cu existența aritmeticii.

Soluția dificultății

§ 45. Să aruncăm acum o privire asupra celor stabilite de noi pînă la acest punct și asupra problemelor ce nu și-au găsit încă răspuns.

Numărul nu este abstras din lucruri în modul în care sînt abstrase culoarea, greutatea și soliditatea, după cum nu este

nici o proprietate a lucrurilor în sensul în care acestea sînt proprietăți. Dar atunci a mai rămas să se arate despre ce anume se enunță ceva prin intermediul aserțiunii numerice[110].

Numărul nu este ceva fizic, dar nu este ceva subiectiv, nu este o reprezentare.

Numărul nu rezultă din adăugarea unui lucru la un lucru. Nici conferirea unei denumiri după fiecare adăugare nu schimbă nimic în această privință.

Expresiile „multitudine", „mulțime", „pluralitate", dat fiind caracterul lor vag, nu sînt adecvate spre a servi la definirea numărului[111].

Referitor la unu și unitate se mai pune problema modului în care putem atenua caracterul arbitrar al concepției ce părea să estompeze orice distincție între unu și multiplu.

Delimitarea, indivizibilitatea, indecompozabilitatea nu sînt caracteristici relevante pentru ceea ce noi exprimăm prin cuvîntul „unu".

Atunci cînd numim unități lucrurile numărate, afirmația necondiționată că unitățile ar fi identice este falsă. Desigur, este corect dar nesemnificativ faptul că într-o anumită privință unitățile sînt identice. Caracterul distinct al lucrurilor pe care le numărăm este chiar necesar, atunci cînd numărul în cauză va fi mai mare ca 1.

Așadar, se părea că eram puși în situația de a atribui unităților două proprietăți contradictorii: identitatea și discernabilitatea[112].

Între unu și unitate trebuie să facem o distincție. Cuvîntul „unu", ca nume propriu al unui obiect de cercetare matematică, nu admite plural. Ca atare, este absurd să facem ca numerele să rezulte din alăturarea unu-urilor. În $1 + 1 = 2$, simbolul plus nu poate semnifica o atare alăturare.

§ 46. Pentru a clarifica lucrurile, va fi indicat să privim numărul în contextul unei judecăți, acolo unde iese în evi-

dentă modalitatea sa originară de aplicare[113]. Dacă privitor la unul şi acelaşi fenomen extern pot afirma la fel de adevărat „acesta este un grup de pomi" şi „aceştia sînt cinci pomi", sau „iată patru companii" şi „iată 500 de oameni", atunci ceea ce se schimbă de la caz la caz nu este nici lucrul individual, nici întregul, agregatul, ci denumirea folosită. Dar acesta nu este decît semnul înlocuirii unui concept prin altul[114]. Astfel, pentru noi devine evident, ca răspuns la prima întrebare din secţiunea precedentă, că aserţiunea numerică cuprinde un enunţ privitor la un concept[115]. Aceasta este poate cel mai evident în cazul numărului 0. Dacă spunem: „Venus are 0 sateliţi" nu avem în fapt un satelit sau agregat de sateliţi despre care ar putea fi ceva enunţat; în schimb, conceptului „satelit al lui Venus" i se atribuie astfel o proprietate, şi anume aceea de a nu cuprinde nimic. Dacă se spune: „Trăsura împăratului este trasă de patru cai", atunci se atribuie numărul patru conceptului „cal înhămat la trăsura împăratului".

Se poate obiecta că un concept cum, de exemplu, este acela de „locuitor al statului german", deşi îşi păstrează neschimbate notele sale, posedă o proprietate ce variază de la an la an, în cazul cînd aserţiunea numerică ar enunţa despre el o asemenea proprietate. Răspunzînd acestei obiecţii, putem arăta că şi proprietăţile obiectelor variază, dar aceasta nu ne împiedică să le recunoaştem ca fiind aceleaşi. În cazul de faţă însă, motivul poate fi determinat încă şi mai precis. Conceptul „locuitor al Germaniei" conţine, într-adevăr, timpul ca parte componentă variabilă sau, ca să mă exprim matematic, este funcţie de timp. Pentru „*a* este un locuitor al Germaniei" putem spune: „*a* locuieşte în Germania", afirmaţie ce se referă tocmai la momentul prezent. Aşadar, însuşi conceptul conţine din capul locului un element fluid. În schimb, însă, conceptului „locuitor al Germaniei în prima secundă a anului 1883, ora Berlinului" îi revine în vecii vecilor unul şi acelaşi număr[116].

§ 47. Faptul că aserţiunea numerică exprimă ceva real, independent de modul nostru de a privi lucrurile, poate fi prilej de uimire numai pentru cel ce consideră conceptul ca ceva subiectiv, asemenea reprezentării. Dar această concepţie este falsă. Atunci cînd, de exemplu, subordonăm conceptul de corp faţă de conceptul de greu, sau cînd subordonăm conceptul balenă faţă de acela de mamifer[117], afirmăm prin aceasta ceva obiectiv[118]. Or, dacă conceptele ar fi subiective, atunci şi subordonarea unuia faţă de un altul ca relaţie între concepte ar constitui ceva subiectiv, aşa cum este o relaţie între reprezentări. La prima vedere, fără îndoială, propoziţia

„toate balenele sînt mamifere"

pare să trateze despre animale, nu despre concepte[119]; dacă ne întrebăm însă despre care animale este vorba, nu sîntem în măsură să indicăm un anumit animal individual. Admiţînd că ne aflăm în faţa unei balene, propoziţia noastră nu afirmă totuşi nimic despre aceasta. Pe baza propoziţiei noastre nu s-ar putea conchide că animalul în faţa căruia ne aflăm ar fi o balenă, lucru despre care propoziţia noastră iniţială nu cuprinde nimic. În general, nu este posibil să vorbim despre un obiect fără a-l desemna sau a-l denumi într-un fel sau altul[120]. Cuvîntul „balenă" nu denumeşte însă o anume fiinţă individuală. Se va obiecta că, într-adevăr, nu este vorba despre un anume obiect individual determinat, ci despre unul nedeterminat; după părerea mea, „obiect nedeterminat" nu este decît o altă expresie pentru „concept", şi anume o expresie inadecvată, contradictorie[121]. Chiar dacă propoziţia noastră poate fi justificată numai prin observarea unor animale individuale, aceasta nu demonstrează nimic în ceea ce priveşte conţinutul ei. Dacă ne interesează la ce anume se referă propoziţia în cauză, faptul că ea este ade-

vărată sau nu n-are importanță, după cum n-are importanță nici pe ce temeiuri o considerăm adevărată. Așadar, dacă conceptul este ceva obiectiv, atunci și un enunț cu privire la acesta poate cuprinde un element factual.

§ 48. În cazul unor exemple anterioare unde se crea aparența că unuia și aceluiași lucru îi revin numere diferite, explicația rezidă în faptul că obiectele erau considerate ca suport al numărului. De îndată ce repunem în drepturi adevăratul suport — conceptul — numerele se dovedesc a fi la fel de exclusive unul față de altul ca și, în domeniul respectiv, culorile.

Acum înțelegem și felul în care apare intenția de a obține numărul făcînd abstracție de lucruri. Ceea ce dobîndim în acest fel este conceptul, la care apoi descoperim numărul. Așadar, în realitate, abstracția premerge adesea formarea unei judecăți numerice. Confuzia este aceeași ca în cazul cînd am spune: conceptul pericolului de incendiu se obține construind un imobil din paiantă cu fronton de scînduri, acoperiș de paie și hornuri neetanșe.

Puterea de strîngere pe care o are conceptul depășește cu mult capacitatea unificatoare a apercepției sintetice. Aceasta din urmă nu ne-ar permite să unim într-un întreg locuitorii Germaniei; dar ei pot fi subsumați conceptului „locuitor al Germaniei" și numărați[122].

Acum devine explicabilă și aplicabilitatea pe scară largă a numărului. Este într-adevăr o enigmă cum un același lucru se poate enunța la fel despre fenomene exterioare, despre fenomene interioare, despre ceea ce este spațial și despre ceea ce este temporal ca și despre ceea ce este aspațial și atemporal. Dar aserțiunea numerică nu îndeplinește nici ea acest oficiu. Numerele sînt atribuite numai conceptelor, sub acestea aducîndu-se ceea ce este de ordin exterior și

ceea ce este de ordin interior, spațialul și temporalul, aspațialul și atemporalul.

§ 49. Concepţia noastră îşi găseşte o confirmare la Spinoza[123], care spune*: „Răspund că un lucru este numit unul sau unic numai în privinţa existenţei sale, nu însă şi în privinţa esenţei sale; căci noi ne reprezentăm lucrurile sub specia numerelor numai după ce ele au fost aduse la o măsură comună. Dacă, de pildă, cineva ține în mînă un sesterţ şi un imperial, el nu va gîndi numărul doi dacă nu va fi în măsură să aplice acestui sesterţ şi acestui imperial unul şi acelaşi nume, şi anume de argint sau monedă: atunci poate el să afirme că are doi arginţi sau două monede; căci el desemnează nu numai sesterţul, ci şi imperialul prin numele de monedă." Cînd Spinoza continuă: „De aici este clar că un lucru este spus a fi sau unic numai după ce un alt lucru a fost reprezentat, lucru care (ca să spunem aşa) concordă cu dînsul"[124], şi consideră că, în sens propriu, Dumnezeu nu poate fi numit unul sau unic, deoarece nu sîntem în măsură să formăm un concept abstract despre esenţa acestuia, Spinoza se înşală crezînd că conceptul poate fi obţinut numai făcînd nemijlocit abstracţie de mai multe obiecte. Dimpotrivă, la concept se poate ajunge şi pornind de la note[125]; iar în acest caz este cu putinţă ca nici un lucru să nu i se subsumeze[126]. Dacă nu ar fi aşa, nu am putea nega vreodată existenţa, şi astfel afirmarea existenţei ar fi la rîndul ei lipsită de conţinut[127].

§ 50. E. Schröder** subliniază că, pentru a se putea vorbi despre frecvenţa unui lucru, numele acelui lucru trebuie să fie întotdeauna un n u m e g e n e r i c, un s u b-

* Baumann, *op. cit.*, vol. I, p. 169.

** *Op. cit.*, p. 6.

stantiv comun (*notio communis*): „De îndată, așadar, ce se are în vedere un obiect în mod complet — cu toate proprietățile și relațiile sale — acesta devine unic în lume în genul său și nu-și mai are seamăn. Numele obiectului va avea atunci caracterul unui nume propriu (*nomen proprium*) și obiectul nu va putea fi gîndit ca un obiect ce apare în mod repetat. Dar aceasta este valabil în genere despre orice lucru, chiar dacă reprezentarea acestuia se constituie pe baza unor abstracțiuni, cu singura condiție ca această reprezentare să înglobeze în sine suficiente elemente pentru a determina integral lucrul respectiv..." A fi numărat „devine cu putință în cazul unui lucru numai în măsura în care trecem cu vederea sau facem abstracție de unele însușiri și relații ce îi sînt proprii și prin intermediul cărora el se diferențiază de toate celelalte lucruri; abia atunci numele lucrului devine un concept aplicabil la mai multe lucruri".

§ 51. Ceea ce conține adevărat această explicație este îmbrăcat în expresii atît de întortocheate și derutante, încît se impun o analiză și o triere. În primul rînd, este inadecvat să spunem că un nume comun este nume al unui lucru. În felul acesta se creează aparența că numărul ar fi proprietate a unui lucru. Un nume comun desemnează tocmai un concept[128]. Numai împreună cu articolul hotărît sau cu un pronume demonstrativ el funcționează în calitate de nume propriu al unui lucru, dar, prin aceasta, el încetează să funcționeze ca nume comun. Numele unui lucru este un nume propriu[129]. Mai departe, nu un obiect apare în mod repetat, ci mai multe obiecte cad sub un concept. Am observat deja, obiectînd lui Spinoza, că un concept se poate obține și altfel decît prin abstracție, adică pornind de la lucrurile care i se subsumează. Aici mai adaug că un concept nu încetează să fie concept atunci cînd lui i se subsumează un singur

lucru care, astfel, este determinat în mod integral pe baza acestui concept[130]. Unui asemenea concept (de exemplu, cel de satelit al Pămîntului) îi revine tocmai numărul 1, care este număr în același sens în care sînt 2 și 3. În cazul unui concept se pune întotdeauna întrebarea dacă lui i se subsumează ceva, și anume ce. În cazul unui nume propriu, asemenea întrebări sînt lipsite de sens[131]. Nu trebuie să ne lăsăm înșelați de faptul că în cadrul limbii un nume propriu, de exemplu, Luna, este folosit în calitate de substantiv comun, și viceversa[132]; în pofida acestui fapt, distincția subzistă. De îndată ce cuvîntul este întrebuințat împreună cu articolul nehotărît sau la plural fără articol, el este un termen conceptual, un nume comun.

§ 52. O altă confirmare a concepției după care numărul este aplicat conceptelor o putem găsi în uzul limbii germane, în care spunem „zehn Mann", „vier Mark", „drei Fass", utilizînd singularul[133]. În cazul de față, singularul ar putea să indice că este vizat nu lucrul, ci conceptul. Avantajul acestui mod de exprimare iese în evidență în mod deosebit în cazul numărului 0. Altminteri, ce-i drept, limbajul atribuie numărul nu conceptului, ci obiectelor: vorbim despre „numărul mingilor", așa cum vorbim despre „greutatea mingilor". În acest fel, vorbim în aparență despre obiecte, pe cînd, în realitate, vrem să enunțăm ceva despre un concept. Această uzanță lingvistică este derutantă. Expresia „patru cai de rasă" creează aparența că „patru" calific conceptul „cal de rasă", la fel cum „de rasă" calific conceptul „cal". În realitate, numai „de rasă" este o notă de acest gen; prin intermediul cuvîntului „patru" enunțăm ceva despre un concept[134].

§ 53. Prin proprietățile enunțate despre un concept nu înțeleg, desigur, notele care alcătuiesc conceptul. Acestea din urmă sînt proprietăți ale lucrurilor care cad sub concept, și

nu ale conceptului însuşi[135]. De exemplu, „dreptunghic" nu este o proprietate a conceptului „triunghi dreptunghic", dar propoziţia că nu există nici un triunghi dreptunghic rectiliniu echilateral exprimă o proprietate a conceptului „triunghi dreptunghic rectiliniu, echilateral"[136]; ea îi atribuie numărul zero[137].

Sub acest raport, existenţa este analoagă numărului. Afirmarea existenţei nu este de fapt nimic altceva decît negarea numărului zero[138]. Întrucît existenţa este o proprietate a conceptului, demonstraţia ontologică a existenţei lui Dumnezeu nu-şi atinge ţinta. La fel de puţin ca şi existenţa este însă unicitatea o notă a conceptului „Dumnezeu". Unicitatea nu poate servi în vederea definiţiei acestui concept, tot aşa cum nici soliditatea, vastitatea şi comoditatea unei case nu pot fi utilizate împreună cu pietrele, mortarul şi grinzile, în vederea construirii sale[139]. Cu toate acestea, din faptul că ceva este proprietate a unui concept nu se poate conchide în mod general că din concept, adică din notele acestuia, ea nu s-ar putea infera. În anumite împrejurări aceasta este cu putinţă, aşa cum, de exemplu, din calităţile materialului de construcţie putem trage de multe ori o concluzie cu privire la durabilitatea unui edificiu. De aceea, ar fi excesiv să pretindem că din notele unui concept nu se poate infera nimic asupra unicităţii sau existenţei; numai că aceasta nu se poate produce vreodată în mod la fel de imediat ca atunci cînd nota unui concept este atribuită ca proprietate unui obiect subsumat acestui concept[140].

Tot astfel, ar fi o eroare a nega că existenţa şi unicitatea pot fi uneori note ale unor concepte. Ele nu sînt însă note ale acelui concept căruia, potrivit uzanţelor lingvistice, i s-ar putea atribui. Atunci cînd, de exemplu, toate conceptele cărora li se subsumează un acelaşi unic obiect sînt strînse sub un concept[141], unicitatea constituie o notă a acestuia din urmă. Sub conceptul menţionat cade, de exemplu, con-

ceptul „satelit al Pămîntului", dar nu cade însuși corpul ceresc care poartă același nume. Așadar, putem subsuma un concept unui alt concept mai înalt, unui concept, ca să spunem așa, de ordinul doi. Această relație nu trebuie însă confundată cu relația de subordonare.

§ 54. Acum devine posibil să definim unitatea în mod satisfăcător. La p. 7 a manualului său menționat anterior, E. Schröder spune: „Acel nume generic sau concept se va chema denumirea numărului format în modul arătat; el constituie esența unității sale."

Într-adevăr, n-ar fi oare cel mai potrivit să numim un concept unitate în raport cu numărul care îi revine? Am putea întrezări atunci un sens al asertiunilor după care unitatea se delimitează față de mediul său înconjurător și este indivizibilă. Într-adevăr, conceptul căruia i se atribuie numărul delimitează în general, într-un anume mod, ceea ce cade sub el. Conceptul „literă a cuvîntului *cinci*" îl delimitează pe *c* față de *i*, pe *i* față de *n* ș.a.m.d. Conceptul „silabă a cuvîntului *cinci*" desprinde cuvîntul ca un întreg care este indivizibil, în sensul că părțile nu mai cad sub conceptul „silabă a cuvîntului *cinci*". Nu toate conceptele au aceeași însușire. Spre a lua un exemplu, putem divide în variate feluri ceea ce cade sub conceptul roșu, fără ca părțile să înceteze să cadă sub același concept. Unui asemenea concept nu-i revine vreun număr finit[142]. În consecință, propoziția privind caracterul delimitat și indivizibilitatea unității poate fi formulată astfel:

Numai un concept care delimitează în mod determinat ceea ce subsumează și care nu permite o divizare arbitrară poate fi unitate în raport cu un număr finit.

Vedem însă că indivizibilitatea are aici o semnificație specială.

Acum putem înțelege cu ușurință cum se pot împăca între ele identitatea și discernabilitatea unităților. Cuvîntul „unitate" este folosit aici în două sensuri. Unitățile sînt identice în accepția explicată mai sus a acestui cuvînt. În propoziția „Jupiter are patru sateliți", unitatea este „satelit al lui Jupiter". Sub acest concept cade atît satelitul I, cît și sateliții II, III și IV. Ca atare, putem spune: unitatea la care se raportează I este identică unității la care se raportează II, și așa mai departe. Aici avem identitatea. Atunci cînd se afirmă însă discernabilitatea unităților, înțelegem prin aceasta caracterul distinct al lucrurilor numărate.

IV. Conceptul de număr[143]

Fiecare număr individual este un obiect de sine-stătător

§ 55. După ce am descoperit că aserțiunea numerică cuprinde un enunț despre un concept, putem încerca să completăm definițiile leibniziene ale numerelor individuale cu definiția lui 0 și cea a lui 1.

În mod evident, putem stipula: numărul 0 revine unui concept atunci cînd sub acesta nu cade nici un obiect. Aici însă, locul lui 0 pare a fi luat de particula „nici un" care are aceeași semnificație. În consecință, este preferabilă următoarea formulare: numărul 0 revine unui concept atunci cînd propoziția că *a* nu cade sub acest concept este valabilă în general pentru orice *a*[143a].

În mod similar s-ar putea spune: numărul 1 revine unui concept F atunci cînd propoziția că *a* nu cade sub F nu are loc în mod general, pentru orice *a*, și cînd din propozițiile:

„a cade sub F" și „b cade sub F"

urmează în general că *a* și *b* sînt identici[144].

Ne mai rămîne să definim în cazul general trecerea de la un număr la numărul imediat următor. Să analizăm următoarea formulare: numărul $(n + 1)$ revine conceptului F atunci cînd există un obiect a care cade sub F și este astfel încît numărul n revine conceptului „subsumat lui F, dar nu a“[145].

§ 56. Aceste definiții par atît de firești în lumina rezultatelor noastre de pînă acum, încît se cere să explicăm de ce ele nu ne pot fi suficiente.

Ultima definiție este aceea care suscită dubii; într-adevăr, riguros vorbind, sensul expresiei „numărul n revine conceptului G“ ne este la fel de necunoscut ca și cel al expresiei „ numărul $(n + 1)$ revine conceptului F“. Fără îndoială, prin intermediul acestei definiții, precum și al celei precedente, putem spune ce înseamnă

„numărul $1 + 1$ revine conceptului F“,

iar după aceea, folosind această din urmă expresie, putem să determinăm sensul expresiei

„numărul $1 + 1 + 1$ revine conceptului F“

și așa mai departe; însă — ca să dăm un exemplu pregnant — definițiile noastre nu ne permit nicicînd să decidem dacă unui concept îi revine cumva numărul Iulius Caesar, dacă acest faimos cuceritor al Galiei este sau nu este un număr. Mai departe, definițiile propuse nu ne ajută să demonstrăm că, dacă numărul a revine conceptului F și numărul b revine aceluiași concept, atunci în mod necesar $a = b$. Expresia „numărul care revine conceptului F“ nu ar putea fi deci justificată și, în genere, ar fi imposibil să demonstrăm pe baza ei o identitate numerică, dat fiind că nu am fi în măsură să concepem un număr determinat. Numai în aparență am definit noi numărul 0, numărul 1; în realitate, nu am precizat decît sensul expresiilor

„numărul 0 revine“,
„numărul 1 revine“,

ceea ce nu ne permite totuşi să distingem înăuntrul acestor expresii pe 0, pe 1, ca obiecte independente, recognoscibile[146].

§ 57. Aici este locul să analizăm mai atent afirmaţia noastră după care orice aserţiune numerică cuprinde un enunţ despre un concept.

În propoziţia „numărul 0 revine conceptului F“, 0 este numai o parte a predicatului, dacă considerăm conceptul F ca subiect real[146]. Din acest motiv, am evitat să numesc un număr cum este 0 sau 1 sau 2 o p r o p r i e t a t e a unui concept. Tocmai datorită faptului că nu formează decît o parte în ceea ce este enunţat, fiecare număr individual apare ca un obiect de sine-stătător[148]. Am atras deja atenţia asupra faptului că spunem „numărul 1“ şi că astfel, prin intermediul articolului hotărît, noi îl erijăm pe 1 în calitate de obiect. În aritmetică, această existenţă independentă apare la fiecare pas, de exemplu, în egalitatea 1 + 1 = 2. Întrucît în cele de faţă noi urmărim să înţelegem conceptul de număr în modul în care el este utilizat în ştiinţă, nu trebuie să ne tulbure faptul că în utilizarea lingvistică cotidiană numărul apare şi în construcţii atributive. Aceasta se poate evita întotdeauna. De exemplu, propoziţia „Jupiter are patru sateliţi“ se poate transpune în „numărul sateliţilor lui Jupiter este patru“. Aici, „este“ nu trebuie considerat ca simplă copulă, ca în cadrul propoziţiei „cerul este albastru“. O dovadă în acest sens este faptul că putem spune: „Numărul sateliţilor lui Jupiter este acela de patru“ sau „este numărul patru“. Aici, „este“ are sensul de „este identic“, „este acelaşi cu“. Avem aşadar o identitate, care afirmă că expresia „numărul sateliţilor lui Jupiter“ desemnează acelaşi obiect ca şi cuvîntul „patru“[49]. Or,

forma identității este forma dominantă în cuprinsul aritmeticii. Acest mod de a vedea lucrurile nu este contrazis de faptul că în cadrul cuvîntului „patru" nu este cuprins nimic cu privire la Jupiter sau la Lună. Nici numele „Columb" nu conține nimic cu privire la descoperire sau la America și totuși un același ins este numit Columb și descoperitorul Americii[150].

§ 58. S-ar putea obiecta că despre obiectul pe care îl numim Patru sau îl numim Numărul sateliților lui Jupiter nu ne putem face nici o idee* ca despre ceva autonom. Dar răspunderea în acest sens nu o poartă autonomia pe care am conferit-o numărului. Desigur, adesea se admite cu ușurință că în reprezentarea a patru puncte ale unui zar intervine ceva ce ar corespunde cuvîntului „patru"; aceasta este însă o iluzie. Să ne gîndim la o livadă verde și să vedem dacă reprezentarea se schimbă atunci cînd înlocuim articolul nehotărît prin numeralul „una". Nimic nu se adaugă în acest caz, în timp ce, dimpotrivă, cuvîntul „verde" își găsește un corespondent în cadrul reprezentării. Atunci cînd ne reprezentăm cuvîntul tipărit „fier"[151] nu ne gîndim mai întîi la vreun număr. Dacă însă ne întrebăm din cîte litere este compus cuvîntul obținem numărul 4; dar prin aceasta reprezentarea nu devine cu nimic mai distinctă, ci poate rămîne absolut neschimbată. Numărul îl descoperim tocmai în conceptul de „literă a cuvîntului fier" care intervine aici. În cazul celor patru puncte ale unui zar situația se prezintă ceva mai confuz, întrucît conceptul ni se impune atît de imediat, datorită asemănării dintre punctele zarului, încît nici măcar nu mai observăm intervenția sa. Numărul nu poate fi reprezentat nici ca obiect autonom, nici ca proprietate a unui lucru exterior, întrucît el nu este nici ceva senzorial, nici proprietate a unui lucru exterior. Faptul este cît se poate

* „Idee", „reprezentare", luată în sensul de imagine intuitivă.

de clar încă în cazul numărului 0. În zadar vom încerca să ne reprezentăm 0 stele vizibile. De bună seamă, ne putem gîndi la un cer acoperit în întregime de nori; dar aici nu avem nimic ce ar corespunde cuvîntului „stea" sau lui 0. Nu facem altceva decît să ne reprezentăm o stare de lucruri care poate ocaziona judecata: în clipa de față nu se poate vedea nici o stea.

§ 59. S-ar putea ca orice cuvînt — chiar și unul ca „numai" — să ne evoce o anumită reprezentare; dar aceasta din urmă nu va corespunde neapărat conținutului cuvîntului; alți oameni pot avea o reprezentare cu totul diferită. În acest caz, ne vom reprezenta, desigur, o stare de lucruri ce trimite la o propoziție în cuprinsul căreia apare respectivul cuvînt; sau, cum se mai poate întîmpla, cuvîntul rostit evocă în memorie cuvîntul scris.

Faptul are loc nu numai în cazul particulelor. Nu încape îndoială că nu avem vreo reprezentare a distanței dintre noi și Soare. Într-adevăr, chiar dacă știm regula care ne arată de cîte ori trebuie să multiplicăm un etalon de lungime, orice tentativă de a ne forma potrivit acestei reguli o imagine măcar în unele privințe adecvată este sortită eșecului. Dar acesta nu este un motiv de a ne îndoi de justețea calculului prin care am aflat distanța și nu ne împiedică în nici un fel să întemeiem raționamentele ulterioare pe existența acestei distanțe.

§ 60. Pînă și un lucru atît de concret cum este Pămîntul, noi nu ni-l putem reprezenta așa cum știm că este; ne mulțumim cu o sferă de mărime neînsemnată, care constituie pentru noi un simbol al Pămîntului, deși știm prea bine că ea diferă foarte mult de acesta. Dar, deși adesea reprezentarea noastră nu corespunde deloc intenției[152], noi judecăm cu un grad înalt de certitudine despre un obiect cum este Pămîntul,

pînă atunci cînd mărimea acestuia este şi ea luată în considerație.

În mod frecvent, gîndirea ne duce dincolo de granițele reprezentabilului, fără ca prin aceasta să pierdem suportul raționamentelor noastre. Chiar dacă, aşa cum s-ar părea, nouă, oamenilor, ne este cu neputință să gîndim fără reprezentări, conexiunea acestora din urmă cu ceea ce este gîndit poate rămîne absolut exterioară, arbitrară şi convențională.

Aşadar, chiar atunci cînd conținutul unui cuvînt nu este reprezentabil, nu avem vreun temei să-i contestăm orice semnificație sau să interzicem utilizarea lui. Impresia contrară apare tocmai datorită faptului că analizăm cuvintele în mod izolat şi căutăm astfel semnificația lor, luînd de aceea în această calitate o reprezentare. În consecință, cuvîntul pentru care nu găsim o imagine interioară corespunzătoare pare a fi lipsit de orice conținut. Or, întotdeauna trebuie să avem în vedere o propoziție completă. Numai în cadrul acesteia cuvintele au, propriu-zis, o semnificație. Imaginile lăuntrice care ne apar cumva cu acest prilej nu sînt obligate să corespundă componentelor logice ale judecății. Este de ajuns ca propoziția în întregul ei să aibă un sens; prin aceasta, părțile sale capătă la rîndul lor un conținut.

Această remarcă îmi apare a fi aptă să arunce o lumină asupra unor concepte dificile, cum este cel al infinitesimalelor*, iar valabilitatea ei nu se limitează la domeniul matematicii[153].

Autonomia pe care o atribuim numărului nu înseamnă că un numeral ar desemna ceva în afara contextului unei

---

* Problema este de a defini sensul unei egalități

$$d f (x) = g (x) d x,$$

dar nu de a indica un segment mărginit de două puncte distincte, a cărui lungime să fie $d x$.

propoziții[154]; prin aceasta, nu vreau decît să exclud folosirea lui în calitate de predicat sau atribut, folosire care îi modifică într-o anumită măsură semnificația.

§ 61. Dar, cum poate ni se va obiecta, chiar dacă Pămîntul nu este propriu-zis reprezentabil, el rămîne totuşi un lucru exterior, care ocupă un loc determinat; unde este însă numărul 4? El nu este nici în afara noastră, nici înăuntrul nostru. Aceasta este adevărat în sens spațial. A determina locul numărului 4 n-are nici un sens; dar de aici urmează numai că acesta nu este un obiect spațial, şi nu urmează că în genere el nu este un obiect. Nu orice obiect este undeva. Nici reprezentările noastre* nu sînt, în acest sens, înăuntrul nostru (subcutaneu). Înăuntrul nostru se găsesc celule ganglionare, corpuscule sanguine ş.a., dar nu reprezentări. În cazul lor, predicatele spațiale nu sînt aplicabile: o reprezentare nu este situată la dreapta sau la stînga alteia; reprezentările nu se află între ele la distanțe măsurabile în milimetri. Spunînd totuşi că reprezentările se află în noi, vrem prin aceasta să le desemnăm ca subiective.

Dar, chiar dacă admitem că subiectivul nu are poziție, cum este cu putință ca ceva obiectiv cum este numărul 4 să nu fie nicăieri? Eu afirm că aici nu este nici o contradicție. Numărul este într-adevăr exact acelaşi pentru toți cei care se ocupă cu el, dar aceasta nu are nimic de-a face cu spațialitatea. Nu orice obiect obiectiv[155] are un loc[156].

Spre a obține conceptul de număr[157] trebuie stabilit sensul unei identități numerice

§ 62. Cum ne vor fi date numerele, de vreme ce despre acestea nu putem avea vreo reprezentare sau intuiție? Cuvin-

* Înțelegînd acest cuvînt în sens pur psihologic, nu psihofizic.

tele semnifică ceva numai în contextul unei propoziții. Așadar, problema este de a clarifica sensul unei propoziții în cuprinsul căreia figurează un numeral[158]. Aceasta mai lasă încă loc arbitrarului. Dar noi am stabilit deja că numerele trebuie înțelese ca reprezentînd obiecte independente. În felul acesta dispunem de o specie de propoziții care trebuie să aibă un sens, și anume propozițiile care exprimă o recogniție. Dacă semnul *a* urmează să ne desemneze un obiect, trebuie să dispunem de un criteriu care să decidă în toate cazurile dacă *b* este același cu *a*, chiar dacă nu întotdeauna stă în puterea noastră să aplicăm acest criteriu. În cazul nostru, trebuie să definim sensul propoziției

„numărul ce revine conceptului F este același cu cel ce revine conceptului G";

cu alte cuvinte, trebuie să redăm într-un alt mod conținutul acestei propoziții, fără a recurge la expresia

„numărul ce revine conceptului F".

Vom da astfel un criteriu general pentru identitatea numerelor. După ce am căpătat un asemenea mijloc pentru a concepe un număr determinat și a-l recunoaște ca același, îi putem atribui un numeral în calitate de nume propriu[159].

§ 63. Un asemenea mijloc a fost indicat încă de către Hume*: „Cînd două numere se combină în așa fel încît unul are mereu o unitate care corespunde fiecărei unități a celuilalt, noi le declarăm egale."[160] Mai recent, se pare că în rîndul matematicienilor** a găsit un mare ecou opinia după care

* Baumann, *op cit.*, vol. II, p. 565.

** Cf. E. Schröder, *op. cit.*, pp. 7–8; E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums*, Berlin, 1872, p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883[161].

identitatea numerică trebuie definită prin intermediul corespondenței biunivoce. Dar de la bun început se ridică anumite dubii și dificultăți logice, pe care nu le putem ocoli fără a le supune unui examen.

Relația de identitate nu intervine numai în cazul numerelor. De aici pare să rezulte că ea nu trebuie definită special pentru cazul de față. S-ar admite, așadar, că conceptul de identitate a fost fixat în prealabil și că apoi, pe baza lui și a conceptului de număr, trebuie să se poată deduce cînd numerele sînt identice între ele, fără să mai fim nevoiți a apela la o definiție specială.

Împotriva acestui punct de vedere trebuie să remarcăm că pentru noi conceptul de număr nu a fost precizat încă, el urmînd a fi determinat abia prin intermediul definiției noastre. Intenția noastră este de a construi conținutul unei judecăți care să poată fi privită ca o identitate, în așa fel încît fiecare membru al acestei identități să fie un număr[162]. Așadar, nu intenționăm a defini identitatea special pentru acest caz, ci vrem să obținem prin intermediul conceptului în prealabil cunoscut al identității ceea ce trebuie considerat ca identic. Desigur, o asemenea definiție pare a fi cu totul neobișnuită, iar logicienii nu au examinat-o încă suficient; dar unele exemple pot arăta că ea nu este nemaiauzită[163].

§ 64. Judecata „dreapta *a* este paralelă cu dreapta *q*“ sau în simboluri:

$$a // b,$$

poate fi înțeleasă ca o identitate. În acest caz, obținem conceptul de direcție și spunem: „direcția dreptei *a* este identică cu direcția dreptei *b*“. Înlocuim așadar semnul // prin semnul mai general =, transferînd asupra lui *a* și *b* conținutul specific al primului semn[164]. Noi scindăm conținutul într-un mod diferit de cel inițial, obținînd astfel un nou concept[165]. Ce-i drept, adesea lucrurile sînt înțelese exact pe dos, unii

profesori definind dreptele paralele ca drepte avînd aceeaşi direcţie. Propoziţia: „Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele" poate fi atunci demonstrată cît se poate de comod, apelînd la o proprietate a identităţii, formulată analog. Numai că, din păcate, adevărata stare de lucruri este astfel răsturnată. Într-adevăr, tot ce este geometric trebuie, negreşit, să aparţină iniţial intuiţiei. Întreb deci dacă cineva are intuiţia direcţiei unei drepte. Intuiţia dreptei însăşi, o are negreşit! Dar înăuntrul intuiţiei acestei drepte mai distingem oare şi direcţia ei? E greu de crezut. Conceptul în cauză este descoperit abia printr-o activitate intelectuală originată în intuiţie. Dimpotrivă, asupra dreptelor paralele dispunem de o reprezentare[166]. Acea demonstraţie despre care am vorbit mai sus devine posibilă numai printr-o presupunere ilicită, introducînd în accepţia cuvîntului „direcţie" ceea ce trebuie abia să fie demonstrat; într-adevăr, dacă propoziţia „două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele" ar fi falsă, *a // b* nu ar putea fi transformată într-o identitate.

Tot astfel, pornind de la paralelismul planelor putem obţine un concept care corespunde celui de direcţie în cazul dreptelor. În lecturile mele, am constatat că în acest scop se foloseşte termenul de „orientare". Din asemănarea geometrică provine conceptul de formă, astfel că, de exemplu, în loc de a spune „ambele triunghiuri sînt asemenea", spunem „ambele triunghiuri au o formă identică" sau „forma unui triunghi este identică cu forma celuilalt". Şi, la fel, din colinearitatea formelor geometrice putem extrage un concept căruia încă nu i s-a dat un nume.

§ 65. Acum, pentru a ajunge, de exemplu, de la paralelism* la conceptul de direcţie, să încercăm următoarea definiţie:

---

* Spre a putea să mă exprim mai comod şi spre a mă face înţeles cu mai multă uşurinţă, vorbesc aici despre paralelism.

Propoziția

„dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*"

înseamnă:

„direcția dreptei *a* este identică cu direcția dreptei *b*".

Această definiție se abate de la uzanțe în măsura în care aparent ea determină relația deja cunoscută de identitate, pe cînd în realitate este menită să introducă expresia „direcția dreptei *a*", expresie care survine în cadrul ei numai în mod secundar[167]. Pe această bază apare un alt dubiu, și anume dacă stipularea de mai sus nu poate duce la o contradicție față de legile cunoscute ale identității. Care sînt aceste legi? În calitate de adevăruri analitice, ele ar trebui să poată fi deduse din însuși conceptul ca atare[168]. Or, Leibniz* introduce definiția:

„Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate",

pe care mi-o însușesc ca definiție a identității[169]. Este indiferent dacă spunem „același", ca Leibniz, sau dacă spunem „egal". „Același" pare, ce-i drept, să exprime o concordanță perfectă, în timp ce „egal" pare să exprime o concordanță doar sub un anumit raport; putem adopta însă un mod de exprimare care să anihilize această diferență, spunînd, de pildă, „lungimea segmentelor este egală" sau „este aceeași", în loc de a spune „segmentele sînt egale în lungime", și spunînd „culoarea suprafețelor este identică", în loc de a spune „suprafețele sînt identice în culoare". Tocmai așa am folosit mai sus cuvîntul în exemple[170]. În fapt, toate legile identității sînt cuprinse în posibilitatea universală de substituire[171].

Esența acestor explicații poate fi transferată cu ușurință la cazul identității numerice.

* *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (ed. Erdmann, p. 94).

Pentru a justifica încercarea noastră de definire a direcției unei drepte, ar trebui, așadar, să arătăm că dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b* putem înlocui peste tot

direcția lui *a*

prin

direcția lui *b*.

Lucrurile se simplifică datorită faptului că inițial nu avem despre direcția unei drepte nici un alt enunț decît că ea coincide cu direcția unei alte drepte. Așadar, nu ne-ar mai rămîne decît să arătăm posibilitatea înlocuirii în cadrul unei asemenea identități sau în cadrul conținuturilor pe care astfel de identități le pot avea în calitate de părți componente*. Toate celelalte tipuri de enunțuri privitoare la direcții urmează a fi explicate în prealabil; în vederea definițiilor lor putem emite regula care să asigure posibilitatea înlocuirii direcției unei drepte prin direcția unei alte drepte, paralelă cu cea dintîi.

§ 66. Dar împotriva definiției propuse se mai poate aduce o a treia obiecție. În cadrul propoziției

„direcția lui *a* este identică cu direcția lui *b*",

direcția lui *a* apare ca obiect** iar definiția noastră ne oferă un mijloc de recunoaștere a acestui obiect, în cazul cînd el

---

* În cadrul unei judecăți ipotetice, de exemplu, o identitate a direcțiilor ar putea să figureze în calitate de condiție sau de consecință.

** Acest lucru ni-l indică articolul hotărît. Pentru mine, conceptul este un posibil predicat al unui conținut judicabil singular, în timp ce obiectul este un posibil subiect al acestuia. Dacă în propoziția „direcția axei telescopului este identică cu direcția axei Pămîntului" considerăm ca subiect direcția axei telescopului, predicatul va fi „identic cu direcția axei Pămîntului". Acesta este un concept. Dar direcția axei Pămîntului este numai o parte a predicatului; ea este un obiect, întrucît poate fi făcută și subiect[172].

s-ar înfățișa într-o altă deghizare, de pildă ca direcție a lui *b*. Dar acest mijloc nu dă satisfacție în toate cazurile. De exemplu, el nu ne permite să decidem dacă Anglia este aceeași cu direcția Pămîntului. Să ne fie scuzat acest exemplu, în aparență absurd! Dacă nimeni nu va confunda Anglia cu axa Pămîntului, cum e de la sine înțeles, aceasta nu se datorează totuși definiției noastre. Ea nu spune nimic cu privire la faptul dacă propoziția

„direcţia lui *a* este identică cu *q*"

trebuie afirmată sau negată, atunci cînd însuşi *q* nu este dat în forma „direcţia lui *b*". Conceptul de direcție ne lipseşte, căci dacă l-am fi avut la dispoziţie am fi putut stipula că dacă *q* nu este o direcţie atunci propoziţia noastră trebuie negată, iar dacă *q* este o direcție atunci decide definiţia noastră anterioară. Am fi înclinaţi să introducem definiția

„*q* este o direcţie dacă există o dreaptă *b*, a cărei direcţie este *q*".

Dar acum este limpede că ne-am învîrtit în cerc. Pentru a putea aplica această definiţie ar trebui să ştim în fiecare caz în parte dacă propoziţia

„*q* este identică cu direcţia lui *b*"

trebuia afirmată sau negată.

§ 67. Dacă am încerca să spunem: *q* este o direcţie dacă se introduce prin intermediul definiţiei formulate mai sus, am privi modul în care obiectul *q* a fost introdus ca pe o proprietate a acestuia, ceea ce nu concordă cu realitatea[173]. Definiția unui obiect, luată ca atare, nu spune de fapt nimic despre acesta, ci stipulează semnificația unui semn. După aceasta, ea se transformă într-o judecată care se referă la

obiectul în cauză, dar de această dată nu-l mai introduce şi stă în acelaşi rînd cu celelalte enunţuri privitoare la el[174]. Dacă am adopta această soluţie, am presupune că un obiect nu poate fi dat decît într-un unic mod; într-adevăr, în caz contrar, din faptul că *q* nu a fost introdus prin intermediul definiţiei noastre nu ar urma că *q* nu putea fi introdus astfel. Toate identităţile s-ar reduce la faptul că ceea ce ne este dat nouă într-un acelaşi mod trebuie să fie recunoscut ca unul şi acelaşi, ceea ce însă este atît de evident şi de steril încît nu merită să mai fie enunţat. În fapt, nici nu s-ar trage vreo concluzie distinctă de una sau alta din premisele noastre. Aplicabilitatea multilaterală şi importantă a identităţilor se bazează, dimpotrivă, tocmai pe faptul că sîntem în măsură să recunoaştem un lucru cu toate că el a fost dat în moduri diferite[175].

§ 68. Întrucît prin procedeele de mai sus nu putem obţine un concept precis al direcţiei, după cum din aceleaşi motive nu putem obţine un concept precis al numărului, vom încerca un alt drum. Dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*, extensiunea conceptului „dreaptă paralelă cu dreapta *a*“ este identică cu extensiunea conceptului „dreaptă paralelă cu dreapta *b*“; reciproc, dacă extensiunile conceptelor sus-menţionate sînt identice, *a* este paralelă cu *b*[176]. Să încercăm deci să definim:

> direcţia dreptei *a* este extensiunea conceptului „paralel cu dreapta *a*“;
> forma triunghiului *t* este extensiunea conceptului „asemenea cu triunghiul *t*“.

Pentru a aplica aceasta în cazul nostru, va trebui ca în locul dreptelor sau triunghiurilor să punem concepte, iar în locul paralelismului sau asemănării să punem posibilitatea corelării biunivoce a obiectelor subsumate unuia din-

tre concepte cu obiectele subsumate celuilalt. Pentru concizie, voi spune că conceptul F este echinumeric cu conceptul G atunci cînd există această posibilitate[177]; mă văd însă obligat să precizez că acest cuvînt trebuie privit ca un mijloc de desemnare ales în mod arbitrar, semnificația termenului urmînd să fie extrasă nu pe baza etimologiei sale, ci pe baza stipulării de mai sus.

În consecință, introduc următoarea definiție:

Numărul care revine conceptului F este extensiunea* conceptului „echinumeric cu conceptul F"[178].

§ 69. Poate că adecvarea acestei definiții nu va fi evidentă de la prima vedere. Într-adevăr, prin extensiune a unui concept nu înțelegem oare altceva? Ceea ce înțelegem prin extensiune rezultă limpede pe baza asertiunilor inițiale ce se pot emite cu privire la extensiunile conceptelor. Ele sînt următoarele:

1. identitatea;

2. faptul că una dintre ele este mai cuprinzătoare decît cealaltă.

---

* Cred că în loc de „extensiune a conceptului" am fi putut spune pur și simplu „concept". S-ar putea aduce însă două obiecții:

1. Aceasta ar contrazice afirmația mea anterioară după care numerele individuale sînt obiecte, așa cum ne indică deopotrivă folosirea articolului hotărît în expresii ca „numărul doi", imposibilitatea de a vorbi despre unu-uri, doi-uri etc. la plural, precum și faptul că numărul constituie numai o parte a predicatului dintr-o aserțiune numerică;

2. conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă.

Eu cred că ambele obiecții pot fi înlăturate; dar aceasta ne-ar putea abate prea mult de la punctul de pornire. Voi presupune că știm ceea ce este extensiunea unui concept[179].

Dar propoziția:

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" este identică cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G"
este adevărată atunci și numai atunci cînd propoziția „conceptului F îi revine același număr ca și conceptului G" este de asemenea adevărată. Așadar, avem aici o concordanță deplină.

Desigur, nu obișnuim a spune că un număr este mai cuprinzător decît un altul în sensul în care extensiunea unui concept este mai cuprinzătoare decît extensiunea altuia; dar este de asemenea exclus cu desăvîrșire ca
extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" să fie mai cuprinzătoare decît
extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G".
Dimpotrivă, cînd toate conceptele echinumerice cu conceptul G sînt echinumerice și cu conceptul F, atunci, invers, toate conceptele echinumerice cu conceptul F sînt echinumerice și cu conceptul G. În accepția de aici, „mai cuprinzător" nu trebuie confundat cu „mai mare", care are loc în cazul numerelor.

Desigur, se mai concepe și cazul în care extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F" este mai cuprinzătoare sau mai puțin cuprinzătoare decît extensiunea unui alt concept, iar aceasta din urmă, potrivit definiției noastre, nu poate fi un număr; deși nu obișnuim a spune că un număr este mai cuprinzător sau mai puțin cuprinzător decît extensiunea unui concept, nimic nu ne împiedică să adoptăm această terminologie, dacă ar fi cazul.

Completare și atestare a definiției noastre

§ 70. Definițiile se atestă prin rodnicia lor. Cele ce ar putea fi lăsate la fel de bine la o parte fără a se afecta prin

aceasta mersul demonstrației trebuie abandonate ca fiind absolut fără valoare.

Să vedem, așadar, dacă din definiția pe care am dat-o numărului ce revine conceptului F se pot deriva proprietăți cunoscute ale numerelor. În cele de față, ne vom limita la proprietățile cele mai simple.

În acest scop, se impune să analizăm cu mai multă minuție echinumericitatea. Noi am definit-o prin intermediul corespondenței biunivoce iar acum trebuie explicat modul în care înțeleg această expresie, întrucît, așa cum se poate bănui cu ușurință, ea conține un element intuitiv[180].

Să luăm următorul exemplu. Cînd un chelner vrea să fie sigur că va pune pe masă tot atîtea cuțite cîte farfurii, el nu are nevoie să numere nici cuțitele, nici farfuriile; este de ajuns să pună în dreapta fiecărei farfurii un cuțit și să aibă grijă ca fiecare cuțit de pe masă să se afle la dreapta unei farfurii. Farfuriile și cuțitele sînt astfel corelate biunivoc între ele, pe baza uneia și aceleiași relații poziționale. Dacă gîndim că în propoziția

„α este așezat imediat la dreapta lui A“,

α și A sînt înlocuite mereu prin alte și alte obiecte, atunci acea parte a conținutului care rămîne neschimbată în cursul acestei operații constituie esența relației. Acum să generalizăm.

Atunci cînd dintr-un conținut judicabil care privește un obiect *a* și un obiect *b* lăsăm la o parte pe *a* și pe *b*, ceea ce ne rămîne este un concept de relație care, de aceea, este completabil într-un îndoit mod. Dacă din propoziția

„Pămîntul este mai greu decît Luna“

detașăm „Pămîntul“, obținem conceptul „mai greu decît Luna“. Dacă, dimpotrivă, detașăm „Luna“, dobîndim con-

ceptul „mai uşor decît Pămîntul". Dacă le lăsăm la o parte pe ambele, ceea ce rămîne este un concept de relaţie care, luat în sine, are tot atît de puţin sens ca şi conceptul simplu: el reclamă întotdeauna o completare spre a forma un conţinut judicabil. Dar completarea se poate perfecta în diferite moduri: în locul Pămîntului şi Lunei eu pot pune, de exemplu, Soarele şi Pămîntul, şi tocmai prin aceasta se creează posibilitatea detaşării[181].

Diferitele perechi individuale de obiecte corelate se raportează la conceptul de relaţie în acelaşi fel — am putea spune, ca subiecte — în care obiectul individual se raportează la conceptul căruia i se subsumează. Aici, subiectul este compus. Uneori, cînd relaţia este convertibilă, această trăsătură capătă o expresie lingvistică, cum se întîmplă în propoziţia „Peleu şi Thetis erau părinţii lui Ahile"*. Dimpotrivă, ar fi imposibil să redăm, de exemplu, conţinutul propoziţiei „Pămîntul este mai greu decît Luna", astfel încît „Pămîntul şi Luna" să apară ca subiect compus, întrucît particula „şi" indică întotdeauna o echivalare sub un raport determinat. Dar aceasta nu afectează cu nimic fondul chestiunii.

Conceptul de relaţie aparţine, aşadar, la fel ca şi conceptul simplu, logicii pure. Aici nu intră în consideraţie conţinutul particular al relaţiei, ci numai forma logică. Adevărul oricărei enunţări despre aceasta din urmă este analitic şi cunoscut *a priori*[182]. Lucrul este valabil pentru conceptele de relaţie la fel ca pentru celelalte.

După cum

„*a* cade sub conceptul F"

---

* Nu trebuie să confundăm acest caz cu cel în care „şi" leagă numai în aparenţă subiectele, în timp ce de fapt el leagă două propoziţii.

este forma generală a unui conținut judicabil raportat la un obiect *a*, tot astfel putem considera

„*a* stă în relația φ față de *b*"

ca formă generală pentru un conținut judicabil referitor la obiectul *a* și obiectul *b*[183].

§ 71. Dacă fiecare obiect subsumat conceptului F se află în relația φ față de un obiect subsumat conceptului G și dacă pentru fiecare obiect de sub G avem un obiect de sub F ce stă în relația φ față de primul, atunci, obiectele de sub F sînt corelate cu cele de sub G prin relația φ[184].

Se mai poate ridica întrebarea: ce semnifică expresia

„fiecare obiect de sub F stă în relația φ față de un obiect de sub G"[185],

în cazul cînd sub F nu cade nici un obiect? Prin aceasta, eu înțeleg faptul că cele două propoziții

„*a* cade sub F"

și

„*a* nu stă în relația φ față de nici un obiect care cade sub G"[186]

nu pot avea loc amîndouă, indiferent de ceea ce desemnează *a*, așa că sau prima, sau a doua, sau ambele sînt false. De aici rezultă că atunci cînd nu există vreun obiect subsumat lui F[187], „orice obiect de sub F stă în relația φ față de un obiect de sub G", deoarece în acest caz prima propoziție, și anume

„*a* cade sub F"

trebuie să fie întotdeauna negată, oricare ar fi *a*.

Tot astfel,

„față de fiecare obiect de sub G un obiect de sub F stă în relația ω"[188]

semnifică faptul că cele două propoziţii

„*a* cade sub G"

şi

„nici un obiect de sub F nu stă în relaţia φ faţă de *a*"

nu sînt compatibile, oricare ar fi *a*[189].

§ 72. Am văzut deci în ce condiţii obiectele subsumate conceptelor F şi G sînt puse în corespondenţă prin intermediul relaţiei φ. Aici, această corelare trebuie să fie biunivocă. Prin aceasta, eu înţeleg faptul că următoarele două propoziţii au loc:

1. dacă *d* stă în relaţia φ faţă de *a*, şi dacă *d* stă în relaţia φ faţă de *e*, atunci în mod general, pentru orice *d*, *a* şi *e*, *a* este acelaşi cu *e*[190];

2. dacă *d* se află în relaţia φ faţă de *a*, şi dacă *b* se află în relaţia φ faţă de *a*, atunci, în mod general, pentru orice *d*, *b* şi *a*, *d* este acelaşi cu *b*[191].

Prin aceasta noi am redus corespondenţa biunivocă la relaţii pur logice şi putem acum defini:

Expresia

„conceptul F este echinumeric cu conceptul G"

are aceeaşi semnificaţie ca expresia

„există o relaţie φ care corelează biunivoc obiectele care cad sub conceptul F cu obiectele care cad sub conceptul G"[192]. Repet definiţia iniţială:

numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F"[193]

şi adaug:

expresia

„*n* este un număr"

are aceeaşi semnificaţie ca expresia

„există un concept astfel încît n este numărul care îi revine“[194].

Conceptul de număr a fost aşadar definit şi deşi în aparenţă a fost definit prin el însuşi, în realitate nu s-a comis vreo eroare, întrucît „numărul care revine conceptului F“ a fost în prealabil definit.

§ 73. În continuare, vrem să arătăm că numărul care revine conceptului F este identic cu numărul care revine conceptului G atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G[195]. Deşi această afirmaţie pare a fi pur tautologică, în realitate lucrurile nu stau aşa, întrucît semnificaţia cuvîntului „echinumeric“ nu derivă din semnificaţia părţilor componente, ci din definiţia dată mai sus.

Conform definiţiei noastre trebuie să arătăm că extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F“ este aceeaşi cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G“, atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G[196]. Cu alte cuvinte: trebuie demonstrat că, admiţînd ipoteza, următoarele propoziţii sînt valabile în mod general:

dacă conceptul H este echinumeric cu conceptul F, atunci el este echinumeric şi cu conceptul G;

şi

dacă conceptul H este echinumeric cu conceptul G, atunci el este echinumeric şi cu conceptul F[197].

Prima propoziţie revine la faptul că există o relaţie care pune în corespondenţă biunivocă obiectele de sub conceptul H cu obiectele de sub conceptul G în cazul cînd există o relaţie φ care pune în corespondenţă biunivocă obiectele de sub conceptul F cu obiectele de sub conceptul G şi cînd

există o relație ψ care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul H cu obiectele de sub conceptul F[198]. Faptul devine mai transparent dacă ordonăm literele după cum urmează

HψFφG.

O asemenea relație poate fi introdusă realmente: ea rezidă în conținutul

„există un obiect care se află față de *c* în relația ψ și față de *b* în relația φ"

atunci cînd detașăm *c* și *b* (adică le privim ca puncte ale relației). Se poate arăta că această relație este biunivocă și că ea corelează obiectele subsumate conceptului H cu obiectele subsumate conceptului G[199].

În mod similar, poate fi demonstrată și cealaltă propoziție*. Sperăm că aceste indicații vor fi suficiente pentru a se admite că nu avem nevoie să împrumutăm de la intuiție vreun temei demonstrativ și că definițiile noastre pot fi utile.

§ 74. Putem trece acum la definirea fiecărui număr în parte.

Întrucît conceptului „neidentic cu sine" nu i se subsumează nimic, voi defini:

0 este numărul care revine conceptului „neidentic cu sine"[201].

S-ar putea ca cineva să fie șocat de faptul că eu vorbesc aici despre un concept. Poate ni se va obiecta că aici este o contradicție, și că aceasta amintește de vechile noastre

* La fel și reciproca acesteia: dacă numărul care revine conceptului F este același cu numărul care revine conceptului G, atunci conceptul F este echinumeric cu conceptul G[200].

cunoştinţe — fierul de lemn şi cercul pătrat. În fapt, eu cred că acestea din urmă nu sînt chiar atît de nocive cum s-a spus. Ce-i drept, ele nu vor avea nicidecum o utilitate; dar, în acelaşi timp, ele nu pot nici să cauzeze vreun rău, dacă nu presupunem că li se subsumează ceva; or, simpla întrebuinţare a conceptului nu atrage după sine această presupunere. Nu întotdeauna faptul că un concept conţine o contradicţie este atît de evident încît să nu reclame o investigaţie; pentru aceasta trebuie să avem mai întîi acel concept şi să-l tratăm logic. Tot ce i se poate cere unui concept din punctul de vedere al logicii şi avînd în vedere rigoarea demonstraţiei este delimitarea sa precisă, astfel încît pentru fiecare obiect să se poată determina dacă acesta cade sau nu sub concept. Amintita exigenţă este satisfăcută întru totul de conceptele care conţin o contradicţie, cum este conceptul „neidentic cu sine"; într-adevăr, despre orice obiect noi ştim că nu cade sub un atare concept*[202].

---

* Cu totul altceva este definiţia unui obiect pe baza unui concept căruia i se subsumează. Expresia „cea mai mare fracţie subunitară", de exemplu, nu are un conţinut, deoarece articolul hotărît pretinde indicarea unui obiect determinat. Dimpotrivă, conceptul „fracţie mai mică decît 1 şi astfel încît nici o fracţie mai mică decît 1 nu e mai mare ca ea" este la adăpost de orice obiecţii şi, pentru a putea să demonstrăm că nu există o asemenea fracţie, trebuie să recurgem la însuşi acest concept, deşi el conţine o contradicţie. Dacă am vrea însă să definim pe baza acestui concept un obiect care cade sub el ar fi necesar, desigur, să arătăm în prealabil două lucruri diferite:

1. că sub acest concept cade un obiect;
2. că sub el cade numai un obiect.

Întrucît însă prima dintre aceste propoziţii este din capul locului falsă, expresia „cea mai mare fracţie subunitară" este lipsită de sens[203].

Eu folosesc cuvîntul „concept“ astfel încît

„*a* cade sub conceptul F“

este forma generală a unui conținut judicabil care se referă la un obiect *a* și care rămîne judicabil orice am pune pentru *a*[204]. Iar în acest sens

„*a* cade sub conceptul «neidentic cu sine»“

înseamnă același lucru ca

„*a* este neidentic cu sine“

sau

„*a* nu este identic cu *a*“[205].

În vederea definirii lui 0 aș fi putut lua orice alt concept sub care nu cade nimic. Pe mine mă interesa însă să aleg un concept despre care aceasta să se poată demonstra în mod pur logic; or, „neidentic cu sine“ se recomandă în mod firesc ca cel mai convenabil în acest scop; pentru „identic“ am adoptat definiția lui Leibniz, introdusă mai sus, definiție care este pur logică[206].

§ 75. Pe baza stipulărilor anterioare se poate demonstra acum că orice concept sub care nu cade nimic este echinumeric cu orice concept sub care nu cade nimic, și numai cu un asemenea concept[207]; de aici urmează că 0 este numărul care revine unui asemenea concept și că nici un obiect nu cade sub un concept căruia îi revine numărul 0[208].

În ipoteza că nici un obiect nu se subsumează conceptului F și nici conceptului G, va trebui să apelăm, spre a demonstra echinumericitatea, la o relație φ pentru care sînt valabile propozițiile:

Orice obiect subsumat lui F stă în relația φ cu un obiect subsumat lui G; cu orice obiect subsumat lui G un obiect subsumat lui F stă în relația φ.

Conform celor spuse înainte despre semnificația expresiei de mai sus, în ipotezele asumate, orice relație respectivă satisface aceste condiții; identitatea care, în plus, este biunivocă le satisface și ea. Într-adevăr, cele două cerințe stipulate anterior sînt îndeplinite.

Dacă dimpotrivă, sub G cade un obiect, de exemplu *a*, în timp ce sub F nu cade nici unul, atunci amîndouă propozițiile

„*a* cade sub G"

și

„nici un obiect care cade sub F nu stă față de *a* în relația φ"

sînt compatibile pentru orice relație φ; într-adevăr, prima propoziție este adevărată conform primei ipoteze, iar a doua este adevărată conform celei de-a doua ipoteze. Căci dacă nu există vreun obiect subsumat lui F, atunci nu există nici un obiect de acest gen care să stea față de *a* într-o relație oarecare. Așadar, nu există nici o relație care, potrivit definiției noastre, să coreleze obiectele subsumate lui F cu cele subsumate lui G și, ca atare, conceptele F și G nu sînt echinumerice[209].

§ 76. Voi defini acum relația în care stau doi membri vecini oarecari ai șirului numerelor naturale. Propoziția

„există un concept F și un obiect *x* ce i se subsumează astfel încît numărul ce revine conceptului F este *n* și numărul ce revine conceptului «subsumat lui F dar nu identic cu *x*» este *m*",

înseamnă același lucru ca

„*n* succedă imediat lui *m* în șirul numerelor naturale"[210].

Evit expresia „*n* este *succesorul* imediat al lui *m*", întrucît justificarea articolului hotărît ar reclama demonstrarea

prealabilă a două propoziţii*. Din acelaşi motiv, eu încă nu ajung să spun aici „$n = m + 1$", căci prin însăşi utilizarea semnului identităţii $(m + 1)$ este desemnat ca obiect.

§ 77. Spre a ajunge acum la numărul 1 trebuie în primul rînd să arătăm că există ceva ce succedă imediat lui 0 în şirul numerelor naturale[211].

Să considerăm conceptul — sau, dacă preferăm, predicatul — „identic cu 0". Acestui concept i se subsumează numărul 0. Conceptului „identic cu 0 dar nu identic cu 0", din contra, nu i se subsumează vreun obiect, astfel încît numărul ce revine acestui concept este 0. Avem deci un concept, „identic cu 0", şi un obiect, 0, ce i se subsumează, despre care au loc:

numărul ce revine conceptului „identic cu 0" este identic cu numărul ce revine conceptului „nu identic cu 0"; numărul ce revine conceptului „identic cu 0 dar nu identic cu 0" este numărul 0.

În consecinţă, conform definiţiei noastre, numărul ce revine conceptului „identic cu 0" succedă imediat lui 0 în şirul numerelor naturale.

Dacă definim acum:

1 este numărul ce revine conceptului „identic cu 0", ultima propoziţie o putem exprima astfel:

1 succedă imediat lui 0 în şirul numerelor naturale[212].

Poate că nu este inutil să observăm că definiţia lui 1 nu presupune, în vederea justificării sale obiective, un fapt observat**; într-adevăr, necesitatea satisfacerii anumitor condiţii subiective pentru ca definiţia să devină pentru noi

* A se vedea nota de la p. 139.

** O propoziţie non-generală.

posibilă se confundă lesne cu faptul că percepțiile senzoriale ne sugerează definiția în cauză*. Chiar dacă ar fi așa, propozițiile derivate nu încetează a fi apriorice. Printre asemenea condiții se numără, de exemplu, și faptul că o cantitate suficientă de sînge avînd compoziția adecvată irigă creierul — cel puțin, după cîte știm; dar adevărul ultimei noastre propoziții este independent de aceasta; el continuă să subziste chiar și atunci cînd faptul menționat nu mai are loc[213]; și chiar dacă ar fi ca toate ființele raționale să se cufunde vreodată într-un somn hibernal, adevărul propozițiilor nu ar fi suprimat în tot acest timp, ci ar rămîne absolut intact. Adevărul unei propoziții nu rezidă în faptul că aceasta din urmă este gîndită[214].

§ 78. Voi enumera aici unele propoziții care se demonstrează prin intermediul definițiilor noastre. Cititorul va sesiza cu ușurință cum se pot efectua demonstrațiile.

1. Dacă a succedă imediat lui 0 în șirul numerelor naturale, atunci $a = 1$[215].

2. Dacă 1 este numărul care revine unui concept, există un obiect subsumat acestuia din urmă[216].

3. Dacă 1 este numărul ce revine unui concept F, dacă obiectul x se subsumează conceptului F și dacă y se subsumează conceptului F, atunci $x = y$; cu alte cuvinte, x este atunci același cu y[217].

4. Dacă unui concept F i se subsumează un obiect și dacă din faptul că x se subsumează conceptului F și y se subsumează conceptului F se poate infera în mod general că $x = y$, atunci numărul ce revine conceptului F este 1[218].

5. Relația lui m față de n instituită prin intermediul propoziției:

---

* Cf. B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie*, p. 164.

„*n* succedă imediat lui *m* în şirul numerelor naturale"

este o relaţie biunivocă[219].

Prin aceasta încă nu se afirmă că pentru fiecare număr există un altul care îi succedă imediat sau căruia îi succedă imediat în şirul numerelor naturale.

6. Orice număr cu excepţia lui 0 succedă imediat unui număr în şirul numerelor naturale[220].

§ 79. Acum, pentru a fi în măsură să demonstrăm că fiecărui număr (*n*) din şirul numerelor naturale îi succedă imediat un număr[221], trebuie să indicăm un concept căruia acesta din urmă îi revine. Vom alege în această calitate

„element al şirului de numere naturale terminat cu *n*", concept pe care va trebui mai întîi să-l definim.

Voi începe prin a repeta cu unele modificări de formulare definiţia succesiunii într-un şir, pe care am dat-o în lucrarea mea *Begriffsschrift*.

Propoziţia

„dacă orice obiect faţă de care *x* stă în relaţia φ cade sub conceptul F, şi dacă din faptul că *d* cade sub conceptul F urmează în mod general, pentru orice *d*, că orice obiect faţă de care *d* stă în relaţia φ cade sub conceptul F, atunci, oricare ar fi conceptul F, *y* cade sub F"

înseamnă acelaşi lucru ca

„y succedă în φ – şir lui *x*"

şi ca

„x precedă în φ – şir lui *y*"[222]

§ 80. Referitor la aceasta nu va fi de prisos să facem unele observaţii. Întrucît nu am definit relaţia φ, şirul nu tre-

buie conceput neapărat în forma unei ordonări spaţiale sau temporale, deşi aceste cazuri nu sînt excluse[223].

S-ar putea considera, eventual, că o altă definiţie este mai naturală, de exemplu următoarea: dacă pornind de la x ne îndreptăm permanent atenţia de la un obiect la un altul faţă de care primul stă în relaţia φ, şi dacă în acest mod se ajunge în cele din urmă la y, spunem că y succedă în φ – şir lui x.

Acesta este un mod de a aborda problema, nu o definiţie. Atingerea lui y prin deplasarea atenţiei noastre poate depinde de diverse circumstanţe subiective, de exemplu de timpul de care dispunem sau de stadiul cunoaşterii noastre. Faptul că y succedă lui x în cadrul φ – şirului nu are în genere nimic de-a face cu atenţia noastră şi cu condiţiile dirijării ei, ci ţine de natura lucrului însuşi, tot aşa cum frunza verde reflectă anumite raze de lumină, indiferent dacă ele cad sau nu pe retina ochiului meu şi suscită ori nu o senzaţie, sau tot aşa cum un grăunte de sare este solubil în apă, indiferent dacă l-am aruncat ori nu în apă, şi indiferent dacă am observat ori nu fenomenul respectiv, rămînînd solubil chiar dacă nici nu am posibilitatea să fac vreo experienţă în acest sens[224].

Definiţia mea permite deplasarea problemei din domeniul posibilităţilor subiective în domeniul determinării obiective. Într-adevăr, faptul că din anumite propoziţii decurge o altă propoziţie este ceva obiectiv, ce nu depinde de legile mişcării atenţiei noastre şi în raport cu care este indiferent dacă noi efectuăm într-adevăr respectivul raţionament. Avem aici un criteriu universal de soluţie a problemei, acolo unde ea poate fi pusă, chiar dacă în anumite cazuri dificultăţile exterioare ne-ar putea împiedica să evaluăm soluţia. Aceasta nu are nimic de-a face cu esenţa chestiunii[225].

Nu întotdeauna se cere să parcurgem toţi termenii şirului începînd cu termenul iniţial şi pînă la un anumit obiect,

pentru a căpăta certitudinea că acesta din urmă este succesorul primului. Dacă, de exemplu, se dă că în cadrul φ – şirului *b* succedă lui *a* şi *c* lui *b*, atunci, conform definiţiei noastre, putem trage concluzia că *c* succedă lui *a* fără a mai fi măcar nevoie să cunoaştem termenii intermediari[226].

Numai pe baza acestei definiţii a succedării într-un şir devine posibil să reducem la legile generale ale logicii raţionamentul de la *n* la (*n* + 1), raţionament care, în aparenţă, este specific matematicii[227].

§ 81. Dacă în calitate de relaţie φ avem acea relaţie în care *m* este pus faţă de *n* prin propoziţia

„*n* succedă imediat lui *m* în şirul numerelor naturale",

atunci, în loc de „φ – şir" spunem „şir al numerelor naturale".

Mai departe, definesc:

propoziţia

„*y* succedă în φ – şir lui *x*, sau *y* este identic cu *x*" înseamnă acelaşi lucru ca

„*y* aparţine φ – şirului care începe cu *x*"

şi ca

„ *x* aparţine φ – şirului care se termină cu *y*".

În consecinţă, *a* aparţine şirului de numere naturale terminat cu *n* atunci cînd *n* succedă lui *a* în şirul numerelor naturale sau cînd el este identic cu *a**.

§ 82. Acum trebuie să arătăm că — dacă o anumită condiţie, care nu a fost încă stipulată, este satisfăcută — numărul ce revine conceptului

* Atunci cînd *n* nu este un număr, numai *n* însuşi aparţine şirului de numere naturale care se termină cu *n*. Acest mod de exprimare nu trebuie să ne contrarieze.

„membru al şirului de numere naturale terminat cu *n*"

succedă imediat lui *n* în şirul numerelor naturale[228]. Dar prin aceasta a rezultat că există un număr care succedă imediat lui *n* în şirul numerelor naturale, şi deci că nu există un membru ultim al acestui şir. Evident, această propoziţie nu poate fi întemeiată în mod empiric sau prin inducţie[229].

Prezentarea demonstraţiei înseşi ne-ar duce prea departe. Ne vom mărgini să schiţăm mersul ei. Trebuie demonstrat că:

1. dacă *a* este succesor imediat al lui *d* în şirul numerelor naturale şi dacă pentru *d* avem:

numărul ce revine conceptului
„membru al şirului de numere naturale terminat cu *d*"

succedă imediat lui *d* în şirul numerelor naturale,

atunci avem pentru *a*:
numărul ce revine conceptului
„membru al şirului de numere naturale terminat cu *a*"

succedă imediat lui *a* în şirul numerelor naturale.

În al doilea rînd, trebuie demonstrat că pentru 0 are loc ceea ce s-a enunţat în propoziţiile formulate mai sus cu privire la *d* şi la *a*; pe această bază vom conchide că aceasta are loc şi pentru *n*, dacă *n* aparţine şirului de numere naturale ce începe cu 0[230]. Acest mod de raţionare este o aplicare a definiţiei pe care am dat-o expresiei

„*y* succedă lui *x* în şirul numerelor naturale",

atunci cînd în calitate de concept F a fost luat acel enunţ comun[231] despre *d* şi *a*, în care 0 şi *n* iau locul lui *d* şi *a*.

§ 83. Spre a demonstra propoziţia (1) din secţiunea precedentă, trebuie să arătăm că *a* este numărul ce revine con-

ceptului „membru al şirului de numere naturale terminat cu *a*, dar nu identic cu *a*“[232]. Pentru aceasta trebuie mai întîi să demonstrăm că acel concept are o extensiune identică cu aceea a conceptului „membru al şirului de numere naturale terminat cu *d*“[233]. În acest scop, avem nevoie de propoziţia că nici un obiect care aparţine şirului de numere naturale ce începe cu 0 nu poate fi propriul lui succesor în cadrul şirului numerelor naturale[234]. Aceasta trebuie să se demonstreze tot prin intermediul definiţiei pe care am dat-o succederii într-un şir, aşa cum s-a indicat mai sus*.

Sîntem astfel obligaţi să ataşăm o condiţie propoziţiei ce afirmă că numărul ce revine conceptului

„membru al şirului de numere naturale terminat cu *n*“ succedă imediat lui *n* în şirul numerelor naturale, şi anume condiţia că *n* aparţine şirului de numere naturale ce începe cu 0. În acest scop dispunem de un mod de exprimare mai succint, pe care îl definesc astfel:

Propoziţia

„*n* este un membru al şirului de numere naturale începînd cu 0“

are aceeaşi semnificaţie ca

„*n* este un număr finit“.

---

* La p. 63, *op. cit.*, E. Schröder pare să considere această propoziţie ca o consecinţă a unui mod de desemnare care poate să difere de cel de faţă. Aici se manifestă neajunsul care afectează întreaga sa prezentare a chestiunii, şi anume că de fapt nu ştim dacă numărul este un semn — iar în acest caz, care este semnificaţia sa — sau dacă numărul este tocmai această semnificaţie a semnului. Din simplul fapt că instituim semne diferite în aşa fel încît nici unul să nu se repete, nu urmează că aceste semne desemnează efectiv lucruri diferite[236].

Atunci putem formula propoziția de mai sus după cum urmează: nici un număr finit nu este propriul său succesor în șirul numerelor naturale[235].

Numere infinite

§ 84. Pe lîngă numerele finite avem numerele infinite[237]. Numărul care revine conceptului „număr finit" este un număr infinit[238]. Să-l notăm, de exemplu, prin ∞_1. Dacă ar fi finit, el nu ar putea fi propriul său succesor imediat în șirul numerelor naturale. Or, se poate arăta că pentru ∞_1 tocmai acesta este cazul.

Numărul infinit ∞_1 astfel definit nu conține nimic misterios sau miraculos. „Numărul care revine conceptului F este ∞_1" nu înseamnă acum nimic mai mult sau mai puțin decît: există o relație care pune obiectele subsumate conceptului F în corespondență biunivocă cu numerele finite. Potrivit definițiilor noastre, condiția are un sens pe deplin clar și neechivoc; aceasta este suficient pentru a justifica utilizarea semnului ∞_1 și a-i garanta o semnificație. Faptul că nu ne putem forma vreo reprezentare despre un număr infinit nu are nici o importanță; nu altfel se întîmplă și cu numerele finite. Numărul nostru ∞_1 este astfel tot atît de determinat ca orice număr finit: el este recognoscibil ca atare fără putință de dubiu și poate fi distins de orice alt număr[239].

§ 85. Recent, G. Cantor a introdus într-o lucrare remarcabilă* numere infinite[240]. Împărtășesc pe deplin aprecierea pe care el o dă concepției care în genere nu acceptă ca avînd

* *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

realitate decît numerele finite. Nici aceste numere, nici fracțiile, nici numerele negative, iraționale și complexe nu pot fi percepute senzorial și nu au caracter spațial; iar dacă spunem că actualitate are numai ceea ce acționează asupra simțurilor sau, cel puțin, comportă efecte ce pot avea drept urmări mai apropiate sau mai îndepărtate percepții senzoriale, atunci desigur că aceste numere nu au actualitate[241]. Dar teoremele noastre nu pretind nicidecum asemenea percepții în calitate de temeiuri demonstrative. În investigațiile noastre putem utiliza fără ezitare un nume sau semn introdus ireproșabil din punct de vedere logic, și deci numărul nostru este tot atît de justificat ca și numărul doi sau numărul trei.

Cred că în această privință sînt de acord cu Cantor, dar terminologia mea diferă întru cîtva de a lui. Ceea ce eu numesc număr, el numește „putere“, în timp ce conceptul său* de număr se referă la ordonare. În cazul numerelor finite independența față de succesiunea în cadrul șirului este incontestabilă, dar nu același este cazul numerelor transfinite[242]. Or, folosirea cuvîntului „număr“ și a întrebării „cît de mulți?“ nu trimite la vreo ordine determinată. Numărul lui Cantor răspunde mai curînd întrebării „al cîtelea membru al succesiunii este membrul ultim?“. Ca urmare, cred că denumirea pe care o folosesc concordă în mai mare măsură cu uzanța lingvistică. Atunci cînd extindem semnificația unui cuvînt, trebuie să avem în vedere ca un număr cît mai mare de propoziții generale să rămînă valabile, și mai cu seamă principii atît de esențiale cum este, în cazul numărului, independența față de poziția în cadrul unui șir. Nu a trebuit să apelăm la o extindere, întrucît conceptul nostru de număr cuprinde din capul locului și numere infinite.

---

* Această expresie ar putea părea să contrazică obiectivitatea conceptului, pe care am evidențiat-o în cele de mai sus; dar în cazul de față, subiectivă este numai denumirea.

§ 86. Spre a obține numerele sale infinite, Cantor introduce conceptul relației de succesiune în cadrul unei consecuții, concept care diferă de conceptul meu de „succesiune într-un șir"[243]. De exemplu, după Cantor, apare o consecuție atunci cînd ordonăm numerele întregi pozitive finite, astfel încît cele impare să se succeadă în ordinea lor naturală și tot astfel cele pare, și totodată stipulăm că orice număr par trebuie să urmeze oricărui număr impar. În această consecuție, de exemplu, 0 ar succeda lui 13. În schimb, nici un număr nu l-ar preceda imediat pe 0. Acesta este doar unul din cazurile ce nu pot surveni în succesiunea în cadrul unui șir definită de mine. Se poate demonstra riguros, fără a apela la vreo axiomă a intuiției, că dacă y este un succesor al lui x în cadrul unui φ – șir, există un obiect care îl precedă imediat pe y în cadrul acestui șir. După părerea mea, încă nu avem o definiție precisă a succesiunii într-o consecuție și a numărului cantorian. Cantor se referă la o „intuiție interioară" misterioasă, acolo unde ar trebui să căutăm o demonstrație pe bază de definiții, demonstrație pe deplin posibilă[244]. Într-adevăr, eu cred a întrezări modul în care pot fi definite conceptele respective. — În nici un caz, nu vreau ca prin observațiile făcute să pun în cauză justificarea și rodnicia acestor concepte. Dimpotrivă, salut în aceste investigații o lărgire a hotarelor științei, și îndeosebi faptul că ele au deschis un drum pur analitic către numerele (puterile) transfinite de ordin superior[245].

V. Încheiere[246]

§ 87. Sper că în această scriere am reușit să fac plauzibil[247] faptul că legile aritmetice sînt judecăți analitice și deci *a priori*. Potrivit acestui punct de vedere, aritmetica ar fi

numai o logică mai elaborată, orice propoziţie aritmetică fiind o lege logică, deşi una derivată[248]. Aplicaţiile aritmeticii în explicarea naturii ar reprezenta prelucrări logice ale unor fapte observate*; a calcula ar însemna a raţiona. Legile numărului nu pretind — aşa cum crede Baumann** — o verificare practică, pentru a fi aplicabile în cadrul lumii exterioare; într-adevăr, în lumea exterioară, a totului spaţial, nu există concepte, proprietăţi ale conceptelor, numere[249]. Aşadar, legile numărului nu sînt propriu-zis aplicabile la lucruri exterioare, ele nu sînt legi ale naturii. În schimb, ele sînt pe deplin aplicabile la judecăţi privitoare la lucrurile lumii exterioare: ele sînt legi ale legilor naturii. Ele afirmă nu o conexiune între fenomene naturale, ci o conexiune între judecăţi; or, în rîndul acestora din urmă se află şi legile naturii[250].

§ 88. Kant*** a subapreciat în mod evident valoarea judecăţilor analitice — şi aceasta ca urmare a unei determinări prea înguste a conceptului în cauză, deşi se pare că el a întrezărit conceptul mai larg pe care îl utilizăm în cele de faţă****. Dacă pornim de la definiţia lui, împărţirea judecăţilor în analitice şi sintetice nu este exhaustivă. Ceea ce are el în vedere este cazul judecăţii universale afirmative. Dacă ne referim la aceasta, putem vorbi despre un concept-subiect şi ne putem întreba dacă conceptul-predicat este cuprins, potrivit definiţiei sale, în primul. Ce se întîm-

---

* Observarea însăşi înglobează deja o anumită activitate logică.

** *Op. cit.*, vol. II, p. 670.

*** *Loc. cit.*, III, p. 39 şi urm.[251]

**** La p. 43 el afirmă că o propoziţie sintetică poate fi privită potrivit principiului contradicţiei numai atunci cînd o altă propoziţie sintetică este presupusă[252].

plă însă atunci cînd subiectul este un obiect singular? Sau ce se întîmplă atunci cînd avem o judecată existenţială? În acest caz nici nu mai putem vorbi despre un concept-subiect în sensul de mai sus. Kant pare a înțelege conceptul ca determinat prin notele ce-i revin; acesta este însă cel mai steril mod de constituire a conceptelor. Dacă aruncăm o privire asupra definițiilor introduse mai sus, nu vom găsi nici una de acest gen. Acelaşi lucru se poate spune şi despre definiţiile cu adevărat fecunde din matematică, de exemplu despre definiţia continuităţii unei funcţii. Ea nu ne oferă o serie de note asociate, ci o combinare mai intimă — aş spune, mai organică — a determinărilor. Deosebirea poate fi intuită prin intermediul unei ilustrări geometrice. Dacă reprezentăm conceptele (sau extensiunile acestora) prin regiuni ale unui plan, conceptului definit pe baza notelor asociate îi va corespunde regiunea comună tuturor regiunilor acestor note; conceptul va fi cuprins prin părţi ale delimitărilor acestora. În cazul unei asemenea definiţii problema constă, aşadar, — vorbind la figurat — în a utiliza într-un mod inedit liniile date în prealabil spre a delimita astfel o anumită regiune*. Dar în acest caz nu iese la iveală ceva esenţial nou. Definiţiile mai fecunde ale conceptelor trasează linii de demarcaţie care nu au fost date în prealabil. Ceea ce se poate infera pe baza lor nu poate fi întrevăzut cu anticipaţie; nu ne mărginim să scoatem din sertar ceea ce pusesem acolo în prealabil. Consecinţele pe care le tragem lărgesc cunoştinţele noastre şi, prin urmare, potrivit lui Kant, trebuie considerate ca sintetice; nu mai puţin însă, ele pot fi demonstrate pur logic şi ca atare sînt analitice. În fapt, ele sînt cuprinse în definiţii, dar aşa cum planta se află în sămînţă, nu aşa cum podul se află într-o casă. Adesea, demonstraţia unei propoziţii reclamă mai

* Şi la fel atunci cînd notele sînt legate prin „sau".

multe definiții și deci propoziția respectivă nu este conținută în vreuna din ele, însă decurge în mod pur logic din toate la un loc[253].

§ 89. Mă văd obligat să contest și valabilitatea universală a afirmației lui Kant* potrivit cu care, fără sensibilitate, nici un obiect nu ne poate fi dat[254]. Zero, unu sînt obiecte care nu pot să ne fie date într-un mod sensibil. Pînă și acei ce consideră că numerele mai mici sînt sensibil intuitive vor trebui să admită că nici un număr mai mare ca $1\,000^{(1000^{1000})}$ nu le poate fi dat într-un mod intuitiv-sensibil, dar că, în pofida acestui fapt, deținem numeroase cunoștințe despre aceste numere. S-ar putea ca termenul „obiect" să fie utilizat de către Kant în vreo altă accepție; dar atunci zero, unu, ca și numărul nostru ∞_1 rămîn inexplicabile; într-adevăr, ele nu sînt concepte și, de altfel, Kant pretinde ca pînă și conceptelor să li se atribuie un obiect în cadrul intuiției[255].

Spre a nu mi se reproșa că mă dedau la șicane mărunte la adresa unui geniu către care nu putem privi decît cu admirație recunoscătoare, cred că este cazul să relev și acordul de idei, care are o pondere cu mult mai mare. Pentru a mă referi numai la probleme legate strîns de cele de față, consider că un mare merit al lui Kant rezidă în faptul că el a făcut distincția între judecățile sintetice și analitice. Spunînd că adevărurile geometriei sînt sintetice *a priori*, el a dezvăluit esența lor reală. Acest lucru merită să fie repetat și astăzi, întrucît el continuă adesea să fie ignorat. Deși Kant s-a înșelat în privința aritmeticii, aceasta — după părerea mea — nu știrbește în mod esențial meritele sale. Pentru el, lucrul cel mai important este existența unor judecăți sintetice *a priori*; problema dacă ele survin numai în cadrul

---

* *Op. cit.*, III, p. 82.

geometriei sau survin şi înăuntrul aritmeticii are o importanţă mai mică[256].

§ 90. Nu pretind a fi făcut mai mult decît plauzibilă natura analitică a adevărurilor aritmeticii, deoarece încă mai putem avea dubii asupra faptului dacă demonstrarea lor se bazează integral pe legi pur logice sau dacă nu cumva un temei demonstrativ de alt gen intervine undeva într-un mod insesizabil. Nici indicaţiile pe care le-am dat în vederea demonstrării unor propoziţii nu vor înlătura întru totul această obiecţie; ea poate fi depăşită numai printr-un lanţ de raţionamente fără fisuri, în cadrul căruia fiecare pas să decurgă conform unuia dintre puţinele procedee de raţionare recunoscute a fi pur logice. Aşa se face că pînă acum nu a fost dată nici măcar o singură demonstraţie; într-adevăr, matematicianul se declară mulţumit atunci cînd fiecare trecere la o judecată nouă este evident corectă, fără să se mai întrebe dacă această evidenţă este de natură logică sau intuitivă. Or, un asemenea demers se relevă adesea a fi foarte complex, el echivalînd cu mai multe inferenţe simple, în care se mai pot strecura unele elemente provenite din intuiţie. Procedîndu-se prin salturi se creează astfel aparenţa unei multitudini nesfîrşite de tipuri de raţionament în matematică; într-adevăr, cu cît sînt mai mari, cu atît salturile pot să reprezinte mai multe combinaţii de raţionamente simple şi de axiome ale intuiţiei. Cu toate acestea, o asemenea trecere ne apare a fi nemijlocit evidentă, fără a mai deveni conştienţi de treptele intermediare şi, întrucît trecerea nu se prezintă sub forma unui procedeu logic de raţionare recunoscut, înclinăm să considerăm această evidenţă ca avînd o natură intuitivă, iar adevărul concluziei îl considerăm drept sintetic, pînă şi atunci cînd domeniul de validitate debordează în mod vădit graniţele intuiţiei.

Urmînd această cale, nu este posibil să delimităm în mod net elementul sintetic, întemeiat pe intuiție, de cel analitic. Totodată, procedînd astfel, nu vom reuși să detașăm în mod cert toate axiomele intuiției, astfel încît fiecare demonstrație matematică să se poată efectua, pornind numai de la aceste axiome, conform legilor logicii[257].

§ 91. Se ridică, de asemenea, necesitatea imperioasă de a evita orice salturi în procesul inferenței. O asemenea exigență este greu de satisfăcut, întrucît operarea pas cu pas este obositoare. Orice demonstrație ceva mai complicată riscă să capete o lungime enormă. Datorită acestui fapt, varietatea excesivă a formelor logice ce-și găsesc expresia în cadrul limbajului îngreunează delimitarea unui ansamblu de moduri de raționament care în același timp să fie suficient în toate cazurile și transparent.

Pentru a diminua această dificultate, am inventat scrierea mea conceptuală. Scopul ei este de a obține o concizie și o claritate sporită a expresiei și de a opera printr-un număr restrîns de forme precise în maniera unui calcul, astfel încît să permită numai pașii conformi unor reguli stipulate o dată pentru totdeauna*. În felul acesta, nici o premisă nu se poate strecura neobservată în cadrul demonstrației. Astfel, fără să împrumut vreo axiomă de la intuiție, am demonstrat o propoziție** care la prima vedere ar putea fi considerată sintetică și pe care o voi formula aici după cum urmează:

Dacă relația fiecărui element al unui șir față de elementul imediat următor este univocă, și dacă *m* și *y* succedă lui

* Această scriere trebuie să fie în măsură, totuși, să exprime nu numai forma logică — așa cum este cazul cu simbolismul lui Boole —, ci și un conținut.

** *Begriffsschrift*, Halle, 1879, p. 86, Formula 133.

x în cadrul acestui şir, atunci sau y precedă lui m în acest şir, sau coincide cu el, sau este succesor al lui m[258].

Această demonstraţie ne permite să constatăm că propoziţii care extind cunoştinţele noastre pot conţine judecăţi analitice*.

Alte numere

§ 92. Pînă acum ne-am limitat examenul la numerele naturale. Să aruncăm acum o privire şi asupra altor genuri de numere, încercînd să aplicăm la acest domeniu mai larg ceea ce am descoperit în cazul domeniului restrîns.

Urmărind să precizeze sensul problemei privind posibilitatea unui număr, Hankel** afirmă: „Numărul nu mai este astăzi un lucru, o substanţă care ar exista în afara subiectului cugetător şi a obiectelor care îl fac cu putinţă, un principiu autonom, cum era, bunăoară, la pitagoricieni. Aşadar, problema existenţei nu poate fi raportată decît la subiectul gînditor sau la obiectele gîndite, obiecte ale căror relaţii sînt reprezentate de numere. Strict vorbind, imposibil pentru matematician este numai ceea ce e logic imposi-

* Se va considera că această demonstraţie este încă mult prea complicată; iată un dezavantaj pe care, desigur, certitudinea practic absolută de a nu se fi strecurat vreo eroare sau omisiune pare a-l compensa cu prisosinţă. Pe atunci, ceea ce urmăream era a reduce totul la un număr minim de legi logice cît mai simple cu putinţă. Din acest motiv, am recurs la un singur mod de inferenţă[259]. Dar încă de pe atunci am indicat în Prefaţă (p. VII) că în vederea unei aplicări ulterioare ar fi de dorit să admitem mai multe asemenea moduri. Aceasta o putem face fără a prejudicia coeziunea lanţului de inferenţe, ceea ce ne permite să obţinem o comprimare considerabilă.

** *Op. cit.*, pp. 6 şi 7.

bil, adică ceea ce se contrazice cu sine. Nu mai trebuie să demonstrăm că numerele care sînt imposibile în acest sens nu pot fi admise. Atunci însă cînd numerele în cauză sînt posibile din punct de vedere logic, cînd conceptul lor este definit în mod clar şi distinct şi deci fără contradicţie, problema de mai sus nu poate consta decît în a şti dacă în domeniul realului sau al datului intuitiv, al actualului, există un substrat al acestora, dacă există obiecte în care numerele, adică relaţiile intelectuale de genul arătat, îmbracă o aparenţă fenomenală."[260]

§ 93. Prima propoziţie ne face să ne întrebăm dacă, potrivit lui Hankel, numerele există în subiectul cugetător, în obiectele care le ocazionează, sau în ambele. În orice caz, în sens spaţial ele nu sînt nici înăuntrul, nici în afara subiectului, sau a unui oarecare obiect. Dar, fără discuţie, ele sînt în afara subiectului în sensul că nu sînt subiective. În timp ce oricine nu poate simţi decît propria lui durere, propria lui plăcere ori foame, nu poate avea decît propriile sale senzaţii auditive şi vizuale, numerele pot fi obiecte comune pentru mai mulţi, şi anume ele sînt pentru toţi exact aceleaşi[261], nu sînt simple stări interioare mai mult sau mai puţin asemănătoare ale unor persoane diferite. Înţelegînd să raporteze problema existenţei la subiectul care gîndeşte, Hankel pare să o transforme astfel într-o problemă psihologică, ceea ce în nici un caz nu este. Matematica nu se interesează de natura psihicului nostru iar răspunsul pe care îl primesc problemele psihologice, oricare ar fi ele, trebuie să-i fie absolut indiferente[262].

§ 94. Trebuie să obiectăm, de asemenea, şi împotriva ideii că pentru matematician imposibil este numai ceea ce se contrazice cu sine. Un concept este admisibil chiar şi în cazul cînd notele sale definitorii cuprind o contradicţie;

singura condiție este să nu presupunem că sub acest concept cade ceva. Dimpotrivă, faptul că conceptul nu cuprinde vreo contradicție nu ne permite încă să deducem că ceva i se subsumează. De altfel, cum s-ar putea demonstra că un concept nu cuprinde vreo contradicție? Demonstrația este departe de a fi întotdeauna evidentă; din faptul că nu întrezărim o contradicție, nu urmează că efectiv nu există nici o contradicție, iar definiția, oricît de clară ar fi, nu oferă garanții în acest sens. Hankel demonstrează* că un sistem închis de numere complexe mai general decît cel uzual și care ar admite toate legile adunării și înmulțirii conține o contradicție. Acest lucru trebuie într-adevăr demonstrat; el nu este imediat evident. Înainte de a se întîmpla aceasta, cineva ar putea totuși să utilizeze un asemenea sistem de numere spre a ajunge la rezultate uimitoare, a căror justificare nu ar fi mai prejos de aceea pe care o dă Hankel** pentru teoremele despre determinanți, prin intermediul numerelor alternante; în adevăr, cine ne garantează că nici în conceptul acestora nu este cuprinsă o contradicție ascunsă? Dar, chiar dacă s-ar putea exclude o asemenea contradicție în cazul general, pentru un număr arbitrar de unități alternante, încă nu ar rezulta că asemenea unități există[263]. Or, tocmai de aceasta avem nevoie. Să luăm ca exemplu Propoziția 18 din Cartea I a *Elementelor* lui Euclid: În orice triunghi latura cea mai mare se opune unghiului mai mare.

Pentru a demonstra aceasta, Euclid duce pe latura mai mare AC un segment AD egal cu latura mai mică AB și apelează totodată la o construcție anterioară. Demonstrația ar eșua dacă un asemenea punct nu ar exista; nu este suficient să nu se fi detectat vreo contradicție în conceptul „punct pe AC, a cărui distanță față de A este egală cu dis-

* *Op. cit.*, pp. 106–107.

** *Op. cit.*, § 35.

tanța lui B față de A". Unim acum B cu D. Faptul că o atare dreaptă există constituie o altă propoziție pe care se sprijină demonstrația noastră.

§ 95. Non-contradicția unui concept poate fi pusă în evidență în mod riguros numai dacă demonstrăm că acestui concept i se subsumează ceva. Reciproca ar fi o eroare[264]. Hankel* o comite atunci cînd afirmă privitor la ecuația $x + b = c$:

„Este evident că atunci cînd $b > c$, nu există nici un număr x în șirul 1, 2, 3..., care să rezolve problema respectivă: scăderea este în acest caz i m p o s i b i l ă. Nimic nu ne împiedică însă în acest caz să privim diferența $(c-b)$ ca pe un semn care oferă problemei o soluție și cu care putem opera exact ca și cum ar fi un semn numeric din șirul 1, 2, 3..."

Și totuși ceva ne împiedică să-l considerăm în mod necondiționat pe $(2 - 3)$ ca pe un semn care oferă o soluție problemei: într-adevăr, un semn gol nu rezolvă problema; dacă nu are un conținut, semnul nu este decît o pată de cerneală obișnuită sau tipografică pe hîrtie și, ca atare, posedă proprietăți de ordin fizic, dar nu și pe aceea de a da 2, atunci cînd îl adunăm cu 3. Propriu-zis, el nu este un număr iar utilizarea sa în această calitate ar constitui o eroare logică. Chiar și atunci cînd $c > b$, nu semnul („$c - b$") este soluția problemei, ci conținutul acestui semn.

§ 96. La fel de bine am putea spune: printre numerele cunoscute pînă acum nu există unul care să satisfacă concomitent ecuațiile

$$x + 1 = 2 \text{ și } x + 2 = 1,$$

însă nimic nu ne împiedică să introducem un semn care soluționează problema. Se va replica: problema conține de

* *Op. cit.*, p. 5. Similar, E. Kossak, *op. cit.*, p. 17 jos.

data aceasta o contradicție. Incontestabil așa este, dacă cerem ca soluția să fie un număr real sau un număr complex obișnuit; dar de ce nu am extinde sistemul nostru de numere, de ce nu am crea numere care să satisfacă exigențele de mai sus? Vom aștepta pînă cînd cineva ne va indica vreo contradicție! Parcă știe cineva ce posibilități oferă aceste noi numere? Firește, în cazul de mai sus univocitatea scăderii nu va mai putea fi păstrată; dar oare la univocitatea extragerii rădăcinii nu ne vedem obligați să renunțăm, de asemenea, atunci cînd vrem să introducem numerele negative? Iar operarea cu numerele complexe face ca logaritmarea să fie multivocă.

Mergînd mai departe, de ce să nu creăm și numere care permit însumarea șirurilor divergente? Dar nu! Matematicianul poate tot atît de puțin ca și geograful să creeze ceva în mod arbitrar; nici el nu poate decît să descopere ceea ce este în fapt și să-i dea nume.

Această eroare afectează teoria formală a fracțiilor, a numerelor negative, a numerelor complexe*. Se emite cerința ca regulile de calcul cunoscute să fie păstrate în măsura posibilului pentru numerele ce urmează a fi introduse, iar de aici se deduc proprietăți și relații generale ale acestora. Dacă nu se ajunge nicăieri la vreo contradicție, introducerea noilor numere se consideră justificată, ca și cum nici o contradicție nu se putea strecura pe undeva, sau ca și cum necontradicția ar fi deja existență![265]

§ 97. Ușurința cu care se comite această eroare se datorează faptului că nu s-a trasat o distincție satisfăcătoare între concepte și obiecte. Nimic nu ne împiedică să facem uz de conceptul „rădăcina pătrată din –1“; dar acest simplu fapt nu ne autorizează să folosim articolul hotărît și să

* La fel se întîmplă cu cardinalii infiniți ai lui Cantor.

considerăm expresia „rădăcina pătrată din −1" ca avînd sens. Dacă admitem că $i^2 = -1$ atunci putem demonstra formula pe baza căreia sinusul unui multiplu al unghiului α se exprimă prin α și cos α; nu trebuie să uităm că propoziția respectivă presupune condiția $i^2 = -1$, condiție pe care nu o putem pur şi simplu omite. Dacă nu ar exista ceva al cărui pătrat să fie −1, egalitatea de mai sus nu ar fi neapărat corectă, în virtutea demonstrației noastre*, deoarece condiția $i^2 = -1$, de care este ținută să depindă valabilitatea egalității, nu ar mai fi satisfăcută. Ar fi ca și cum în cursul unei demonstrații geometrice am apela la o linie auxiliară a cărei trasare este imposibilă.

§ 98. Hankel** introduce două tipuri de operații, numite de el lytică şi tetică, definindu-le prin anumite proprietăţi pe care aceste operații trebuie să le satisfacă. Aici nu avem nimic de obiectat, atît timp cît nu se presupune existența unor asemenea operații și a unor obiecte ce pot rezulta din ele***. Mai încolo**** el notează prin $(a + b)$ o operație tetică univocă, asociativă, iar operația lytică corespunzătoare, de asemenea univocă, o notează prin $(a - b)$. O operație? Care însă anume? Una arbitrară? În acest caz, nu avem nicidecum o definiţie pentru $(a + b)$; şi ce se întîmplă dacă nici nu există vreo asemenea definiție? Dacă cuvîntul „adunare" nu ar avea încă vreo semnificație, ar fi permis din punct de vedere logic să spunem: o operație de acest gen o vom numi adunare; dar nu putem spune: o asemenea ope-

* Deşi nu este exclus ca ea să poată fi demonstrată riguros pe o altă cale.

** *Op. cit.*, p. 18.

*** Ceea ce în realitate Hankel și face, întrucît aplică identitatea $\Theta(c, b) = a$.

**** *Op. cit.*, p. 29.

rație trebuie să se numească *adunarea* și să se noteze prin $(a + b)$, înainte de a fi stabilit că există o asemenea operație și numai una. Nu este permis să utilizăm într-o parte a unei identități definitorii articolul nehotărît, iar în cealaltă parte articolul hotărît. Hankel întrebuințează în continuare expresia „modulul operației" fără vreo altă precizare, fără să fi arătat că există un modul și numai unul.

§ 99. Pe scurt, această teorie pur formală[266] este nesatisfăcătoare. Elementul ei valoros se rezumă la următoarele. Se demonstrează că atunci cînd operațiile se bucură de anumite proprietăți, ca asociativitatea și comutativitatea, anumite propoziții sînt valabile privitor la ele. Arătîndu-se apoi că adunarea și înmulțirea pe care le cunoaștem deja au aceste proprietăți, putem enunța imediat despre ele propozițiile respective fără a mai repeta demonstrația amănunțită în fiecare caz în parte. Abia prin această aplicare la operații date în altă parte ajungem la propozițiile cunoscute ale aritmeticii. În nici un caz nu putem crede însă că această metodă ne-ar permite să introducem adunarea și înmulțirea. Ceea ce se dă este numai un îndreptar pentru definițiile în cauză, nu înseși aceste definiții. Dacă spunem că denumirea de „adunare" trebuie conferită numai unei operații tetice univoce și asociative, prin aceasta operația care urmează a se chema astfel nu a fost încă dată. După aceea, nimic nu ne împiedică să numim înmulțirea adunare și să o notăm prin $(a + b)$, și nimeni n-ar putea să afirme în mod precis dacă $2 + 3$ fac 5 sau 6.

§ 100. Dacă abandonăm această abordare pur formală, o cale pare a ni se deschide de la sine, grație faptului că semnificația cuvintelor „sumă" și „produs" se extinde concomitent cu introducerea unor numere noi. Luînd un obiect,

— să spunem Luna — vom defini: Luna multiplicată prin ea însăşi este −1. În acest caz, Luna reprezintă pentru noi o rădăcină pătrată din −1.[267] Această stipulare pare a fi permisă, întrucît din semnificaţia de pînă acum a înmulţirii sensul unui asemenea produs nu reiese de la sine şi de aceea el poate fi stabilit în mod arbitrar, prin extinderea acestei semnificaţii. Dar nouă ne mai trebuie şi produsul unui număr real prin rădăcina pătrată din −1. În consecinţă, vom alege intervalul de o secundă în calitate de rădăcină pătrată din −1 şi îl vom nota prin i. Vom înţelege atunci prin $3i$ intervalul de 3 secunde ş.a.m.d.* Ce obiect îl vom simboliza atunci, să spunem, prin $2 + 3i$? Ce semnificaţie ar urma să fie atribuită în acest caz semnului plus? Ea trebuie stabilită însă în cazul general, ceea ce, desigur, nu va fi uşor de realizat. Dar să admitem deocamdată că am ataşat un sens tuturor semnelor de forma $a + bi$, şi anume un sens pentru care legile cunoscute ale adunării rămîn valabile. Atunci ar urma să stipulăm, în continuare, că în general avem

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc),$$

definind astfel înmulţirea extinsă.

§ 101. Acum, dacă am şti că din egalitatea numerelor complexe decurge egalitatea părţilor reale, am putea demonstra formula pentru cos $(n\alpha)$. Aceasta ar trebui să rezulte

---

* Cu acelaşi drept am putea alege şi un anumit cuantum de electricitate, o anumită suprafaţă ş.a.m.d. în calitate de rădăcini pătrate din −1, aceste rădăcini diferite urmînd, bineînţeles, să fie notate în mod diferit. Faptul că, după toate aparenţele, putem crea astfel un număr arbitrar de rădăcini pătrate din −1 va fi mai puţin surprinzător dacă ne gîndim că semnificaţia rădăcinii pătrate nu a fost stabilită în mod invariabil înaintea acestor stipulări, ci abia prin intermediul lor[268].

din sensul lui $a + bi$, pe care aici l-am luat ca dat din capul locului. Demonstrația ar fi valabilă numai pentru acel sens al numerelor complexe, al sumelor și produselor lor, pe care l-am stipulat deja. Întrucît însă, pentru realul întreg n și realul α, i nu mai apare în cuprinsul ecuației, am putea fi tentați să conchidem: așadar, este absolut indiferent ce anume înseamnă i — o secundă, un milimetru sau orice altceva — atîta timp cît legile noastre pentru adunare și înmulțire sînt valabile, totul depinde numai de acestea; în rest, nu trebuie să ne pese de nimic. Poate că, într-adevăr, putem stabili semnificația lui $a + bi$, a sumei și produsului în variate moduri, astfel încît propozițiile respective să rămînă valabile; nu este însă indiferent dacă în genere putem găsi un asemenea sens pentru aceste expresii.

§ 102. De multe ori se procedează ca și cum simpla emitere a unei cerințe ar constitui deja propria ei satisfacere. Postulîndu-se că scăderea*, împărțirea, extragerea rădăcinii pot fi efectuate în toate cazurile, se consideră apoi că aceasta este suficient. De ce nu cerem atunci ca și prin trei puncte oarecari să se poată duce întotdeauna o dreaptă? De ce nu cerem ca totalitatea legilor adunării și înmulțirii să fie valabile pentru un sistem tridimensional de numere complexe ca și pentru unul real? Pentru că acest postulat cuprinde o contradicție. Dar dacă este așa, trebuie mai întîi să se demonstreze că și celelalte postulate nu conțin vreo contradicție! Atîta timp cît acest deziderat nu a fost împlinit, rigoarea mult rîvnită rămîne un pur miraj[269].

Într-o teoremă geometrică, liniile auxiliare la care s-a recurs cumva în cadrul demonstrației nu mai apar. Eventual sînt posibile mai multe asemenea construcții auxiliare, de exemplu atunci cînd putem alege un punct în mod arbi-

* Compară Kossak, *op. cit.*, p. 17.

trar. Dar, oricît de superfluă ar fi orice linie în parte, forța demonstrației depinde totuși de posibilitatea trasării unei linii cu proprietatea dorită. Simpla postulare nu este suficientă. Tot astfel și în cazul nostru, pentru ca demonstrația să fie convingătoare nu este indiferent dacă „*a* + *bi*" are un sens sau nu e decît cerneală tipografică. Pentru aceasta nu este de ajuns să cerem ca să aibă un sens, sau să afirmăm că sensul ar fi suma lui *a* și *bi*, dacă în prealabil nu am definit ce înseamnă în cazul de față „sumă" și dacă nu am justificat utilizarea articolului hotărît.

§ 103. Împotriva propunerii noastre de stabilire a sensului lui „i" se pot aduce, desigur, numeroase obiecții. Pe această cale, noi introducem un element cu totul eterogen, timpul, înăuntrul aritmeticii. Secunda nu stă în vreun raport intim cu numerele reale. Propozițiile demonstrate prin intermediul numerelor complexe ar deveni judecăți *a posteriori* sau sintetice dacă nu ar exista un alt gen de demonstrație, sau dacă nu am putea găsi vreun alt sens pentru *i*. În orice caz, ar trebui să încercăm mai întîi să demonstrăm că toate propozițiile aritmeticii sînt analitice.

Cînd Kossak* afirmă privitor la numărul complex: „El este reprezentarea compusă a unor grupuri eterogene de elemente identice"**, s-ar părea că el a reușit astfel să evite introducerea unui lucru străin; dar această aparență se datorează numai impreciziei modului său de exprimare. Nu ni se explică deloc ce înseamnă propriu-zis 1 + *i*: este reprezentarea unui măr și a unei pere, sau a durerii de dinți și podagrei? În orice caz, nu poate să însemne concomitent

---

* *Op. cit.*, p. 17.

** A se compara privitor la expresia „reprezentare", § 27, privitor la „grup" cele spuse despre „agregat" la §§ 23 și 25, iar privitor la identitatea elementelor §§ 34–39.

amîndouă, întrucît $1 + i$ nu ar fi atunci întotdeauna identic cu $1 + i$. Se va spune: semnificația sa depinde de stipularea specială respectivă. Dar dacă este așa, nici propoziția lui Kossak nu ne oferă vreo definiție a numărului complex, ci numai un îndreptar general în acest scop. Ni se cere însă mai mult; trebuie să știm precis ce semnifică „*i*", iar în cazul cînd, conform îndreptarului de mai sus, am spune că semnifică reprezentarea unei pere — am introduce din nou ceva străin înăuntrul aritmeticii.

În comparație cu propunerile examinate pînă acum, ceea ce se numește de obicei reprezentare geometrică a numerelor complexe[270] are cel puțin avantajul că 1 și *i* nu par a fi complet disparate și eterogene; segmentul considerat ca reprezentant al lui *i* se află într-o relație strictă cu segmentul care îl reprezintă pe 1. De altfel, riguros vorbind, nu este corect că aici 1 semnifică un anumit segment, iar *i* un segment perpendicular pe acesta și de lungime egală; din contra, „1" semnifică peste tot același lucru. Un număr complex indică aici modul în care segmentul care îl reprezintă provine dintr-un segment dat (segmentul unitate), prin multiplicare, diviziune și rotație*. Dar, ca și în cazul propunerilor anterioare, orice teoremă a cărei demonstrație se bazează pe existența unui număr complex apare a fi dependentă de intuiția geometrică și deci sintetică.

§ 104. Cum vom introduce, în acest caz, fracțiile, numerele iraționale și cele complexe? Dacă apelăm la ajutorul intuiției, introducem un element străin înăuntrul aritmeticii; dacă însă definim numai conceptul unui asemenea număr prin notele sale, dacă nu pretindem decît ca numărul să satisfacă anumite proprietăți, nimic încă nu ne garantează că acestui concept i se va subsuma ceva ce satisface exi-

* Pentru simplitate, fac aici abstracție de incomensurabile.

genţele noastre; or, demonstraţiile noastre trebuie să se sprijine tocmai pe acest fapt[271].

Cum stau însă lucrurile în cazul numărului [natural]? Să fie adevărat că nu avem drept să vorbim despre $1\ 000^{(1000^{1000})}$ înainte ca intuiţiei să-i fie date tot atîtea obiecte? Pînă atunci, acesta rămîne un semn gol? — Nicidecum, el are un sens absolut determinat, deşi, din punct de vedere psihologic, este imposibil, chiar dacă ţinem seamă numai de scurtimea vieţii noastre, să aducem în faţa conştiinţei atîtea obiecte*; dar, în pofida acestui fapt, $1\ 000^{(1000^{1000})}$ este un obiect ale cărui proprietăţi le putem cunoaşte, deşi el nu este intuibil[272]. Pentru a ne convinge, ajunge să arătăm, atunci cînd introducem semnul a^n pentru ridicarea la putere, că, dacă a şi n sînt numere întregi pozitive, semnul de mai sus exprimă întotdeauna un număr întreg pozitiv şi numai unul. Explicaţia detaliată a felului cum aceasta este cu putinţă ne-ar abate prea mult de la ţinta noastră. În linii mari, calea urmată este indicată de modul în care am explicat în § 74 numărul zero, în § 77 numărul unu şi în § 84 numărul cardinal infinit ∞_1, precum şi de schiţa demonstraţiei că orice număr finit din şirul numerelor naturale are ca succesor imediat un număr (§§ 82 şi 83).

În ultimă instanţă, definiţia fracţiilor, a numerelor complexe ş.a.m.d. va reveni şi ea integral la descoperirea unui conţinut judicabil care poate fi transformat într-o identitate ai cărei membri vor fi tocmai aceste numere noi. Altfel spus: trebuie să stipulăm sensul unei judecăţi de recogniţie pentru asemenea numere. Cu acest prilej trebuie să avem în vedere dubiile suscitate de o atare transformare, pe care le-am discutat (§§ 63–68). Dacă procedăm la fel

* Este uşor de văzut că o durată de milioane de ani nu ar fi de ajuns pentru aceasta.

ca acolo, noile numere ne vor fi date ca extensiuni de concepte.

§ 105. Pe baza acestui mod de a concepe numerele* se explică uşor, după părerea mea, farmecul pe care îl exercită studiul aritmeticii şi analizei. Parafrazînd o afirmaţie bine cunoscută, am putea spune: obiectul propriu al raţiunii este raţiunea[274]. În cadrul aritmeticii, noi nu avem de-a face cu obiecte pe care le cunoaştem ca pe ceva străin, exterior, prin intermediul simţurilor, ci cu obiecte date în mod nemijlocit raţiunii, care le poate intui deplin pe acestea ca pe ceva propriu, al ei**.

În pofida faptului de mai sus, ori, mai bine zis, tocmai datorită lui, aceste obiecte nu sînt fantasme subiective. Nu există nimic mai obiectiv decît legile aritmeticii.

§ 106. Să aruncăm încă o dată o scurtă privire retrospectivă asupra mersului pe care l-am urmat în cercetarea noastră! După ce am stabilit că numărul nu este un conglomerat de lucruri sau o proprietate a unui asemenea conglomerat, dar, pe de altă parte, nu este nici produsul subiectiv al unor fenomene psihice, ci, dimpotrivă, că determinarea numerică a unui concept enunţă ceva obiectiv, ne-am străduit, în continuare, să definim fiecare dintre numerele 0, 1

* Mod pe care l-am putea numi de asemenea formal, dar care este absolut distinct de cel pe care l-am examinat mai sus sub această denumire[273].

** Prin aceasta nu vreau să contest cîtuşi de puţin că, în absenţa impresiilor senzoriale, am fi opaci ca un lemn şi că nu am putea avea cunoştinţă despre numere sau despre orice altceva; dar în cadrul de faţă, acest principiu psihologic nu ne priveşte cîtuşi de puţin. Doresc să subliniez încă o dată primejdia permanentă de a confunda două chestiuni radical deosebite.

ş.a.m.d. în parte, precum şi trecerea de la un număr la altul în cadrul şirului numerelor. O primă tentativă a eşuat, întrucît noi eram în măsură să definim numai acele aserţiuni despre concepte în care 0, 1 intervin în calitate de părţi componente, dar nu eram în măsură să definim înseşi aceste numere în mod separat. Drept urmare, nu am putut demonstra identitatea numerelor. A reieşit că numărul pe care îl studiază aritmetica nu poate fi conceput ca un atribut neautonom, ci trebuie conceput în mod substantival*. Numărul ne-a apărut, prin urmare, ca obiect recognoscibil, deşi nu ca obiect fizic sau măcar spaţial, şi totodată nu ca un obiect despre care ne-am putea forma o reprezentare cu ajutorul imaginaţiei. Am emis apoi principiul că semnificaţia unui cuvînt nu poate fi elucidată în mod izolat, ci numai în contextul unei propoziţii, încredinţat fiind că numai prin respectarea acestui principiu putem evita înţelegerea fizicalistă a numărului, fără a cădea în cea psihologică. Or, există tocmai un gen de propoziţii care trebuie să aibă un sens pentru fiecare obiect: propoziţiile de recogniţie, care, în cazul numerelor, poartă denumirea de egalităţi. Am văzut că şi determinarea numerică poate fi concepută ca o egalitate. Ca atare, se cerea să stabilim sensul unei egalităţi numerice, să-l exprimăm fără a face uz de numerale sau de cuvîntul „număr". Am descoperit că o judecată de recogniţie privitoare la numere are drept conţinut posibilitatea ca obiectele care cad sub un concept F să fie puse în corespondenţă biunivocă cu obiectele care cad sub un concept G. Definiţia noastră trebuia, deci, să echivaleze posibilitatea menţionată cu o egalitate numerică. Am amintit unele cazuri de acelaşi gen: definiţia direcţiei pe baza paralelismului, definiţia formei pe baza asemănării ş.a.m.d.

* Această distincţie corespunde celei dintre „albastru" şi „culoarea cerului"[275].

§ 107. S-a pus atunci întrebarea: în ce condiții avem dreptul să concepem un conținut ca aparținînd unei judecăți de recogniție? Pentru aceasta, se cere să fie satisfăcută condiția ca, în cadrul fiecărei judecăți, partea stîngă a egalității asumate cu titlu de probă să poată fi înlocuită prin cea dreaptă, fără a se afecta prin aceasta adevărul judecății. Or, dacă nu punem în joc alte definiții despre partea stîngă sau dreaptă a unei egalități, nu cunoaștem un alt enunț decît tocmai cel al identității[276]. Așadar, era suficient să se pună în evidență posibilitatea substituției în cadrul unei egalități.

Dar un dubiu continua să subziste. O propoziție de recogniție, într-adevăr, trebuie să aibă întotdeauna un sens. Or, dacă posibilitatea punerii în corespondență biunivocă a obiectelor de sub conceptul F cu obiectele de sub conceptul G o înțelegem ca pe o identitate și dacă, în consecință, spunem: „Numărul ce revine conceptului F este identic cu numărul ce revine conceptului G", introducînd astfel expresia „Numărul ce revine conceptului F", egalitatea va avea pentru noi un sens numai atunci cînd ambele ei părți vor avea forma stipulată mai sus. Potrivit unei atare definiții, nu am putea stabili dacă o egalitate este adevărată sau falsă în cazul cînd numai una din părțile ei are această formă. Am ajuns astfel la următoarea definiție:

Numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „concept echinumeric cu conceptul F", înțelegîndu-se că un concept F este echinumeric cu un concept G atunci cînd există posibilitatea unei corespondențe biunivoce.

Aici noi am presupus că sensul expresiei „extensiune a conceptului" este cunoscut în prealabil. Desigur, acest mod de a depăși dificultatea nu va fi acceptat în mod unanim; unii vor prefera să risipească acel dubiu într-un mod diferit. Eu însumi nu atribui acestui apel la extensiunea conceptului o importanță decisivă[277].

§ 108. Acum ne mai rămîne să explicăm corespondența biunivocă; pe aceasta noi am redus-o la relații pur logice. După ce am schițat în linii mari demonstrația propoziției: Numărul unui concept F este egal cu numărul conceptului G atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G, am definit numărul 0, expresia „*n* este succesorul imediat al lui *m* în șirul numerelor naturale“ și numărul 1, după care am arătat că 1 este succesorul imediat al lui 0 în șirul numerelor naturale. Am enunțat cîteva teoreme care în acest stadiu se pot demonstra cu ușurință și apoi ne-am oprit ceva mai mult asupra următoarei propoziții care ne arată că șirul numerelor este infinit: În șirul numerelor naturale orice număr admite un succesor.

Am fost conduși astfel la conceptul „membru al șirului numerelor naturale terminat cu *n*“, concept despre care am urmărit să arătăm că numărul său este succesorul imediat al lui *n* în șirul numerelor naturale. L-am definit mai întîi prin intermediul succesiunii unui obiect *y* după un obiect *x* în cadrul unui φ – șir general. Sensul acestei expresii a fost redus, la rîndul său, la relații pur logice. În felul acesta am reușit să arătăm că raționamentul care procedează de la *n* la $(n + 1)$ și este considerat îndeobște a fi specific matematic se întemeiază pe formele universale ale raționamentului logic.

Pentru a demonstra infinitatea șirului numerelor trebuie să apelăm acum la propoziția că nici un număr finit din șirul numerelor naturale nu este propriul său succesor. Am ajuns astfel la conceptul de număr finit și la conceptul de număr infinit. Am arătat că în principiu acesta din urmă este tot atît de întemeiat din punct de vedere logic ca și primul concept. Cu titlu de comparație ne-am referit la numerele cardinale infinite ale lui Cantor și la „succesiunea în cadrul

unei consecuţii" a acestuia, scoţînd în evidenţă, cu acest prilej, deosebirea de formulare.

§ 109. Pe baza celor de mai sus a rezultat astfel cu o mare probabilitate natura analitică şi apriorică a adevărurilor aritmetice; am ajuns totodată la o reformă a concepţiei lui Kant. Mai departe, am văzut ceea ce mai lipseşte pentru a ridica această probabilitate la rangul de certitudine şi am indicat drumul care trebuie să conducă într-acolo.

În sfîrşit, am folosit rezultatele noastre în critica unei teorii formale a numerelor negative, raţionale, iraţionale şi complexe, critică ce a pus în evidenţă inadecvarea acesteia. Eroarea ei rezidă, cum am văzut, în faptul că ea asuma necontradicţia unui concept atunci cînd nici o contradicţie nu s-a manifestat, iar necontradicţia unui concept era considerată ca o garanţie suficientă a realizabilităţii acestuia[278]. Această teorie îşi imaginează că este suficient să erijeze anumite postulate; satisfacerea acestora s-ar subînţelege atunci de la sine. Ea se comportă ca un zeu căruia Cuvîntul îi ajunge ca să poată crea tot ce vrea. Trebuie să criticăm, totodată, identificarea unei directive în vederea unei definiţii cu însăşi definiţia, directivă a cărei respectare ar introduce un element străin înăuntrul aritmeticii, deşi ea însăşi în formularea sa evită aceasta, dar numai întrucît rămîne o simplă directivă.

Teoria formală la care ne referim ajunge astfel în primejdia de a recădea în aposterioric sau cel puţin în sintetic, în pofida pretenţiilor sale de a accede la o culme a abstracţiunii.

Analiza noastră anterioară a numerelor întregi pozitive ne-a arătat însă posibilitatea de a evita această amalgamare a lucrurilor externe cu intuiţiile geometrice, fără să cădem totuşi în greşelile acelei teorii formale. Ca şi acolo, pro-

blema rezidă în stabilirea conținutului unei judecăți de recogniție. Dacă considerăm că acest deziderat a fost îndeplinit integral, numerele negative, fracționare, iraționale și complexe nu apar cu nimic mai misterioase decît numerele întregi pozitive, iar acestea din urmă nu apar ca avînd mai multă realitate ori existență, sau ca fiind mai inteligibile decît cele dintîi[279].

NOTE

1 Titlul cărții este: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logischmathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau, W. Koebner, 1884). O nouă ediție a apărut abia în 1934, la Breslau, iar în 1961 la Georg Olms Verlag, Hildesheim (copie fotomecanică a ediției din 1934).

2 *Cuprinsul* cărții constituie un adevărat compendiu, la care se recomandă cititorului să revină în repetate rînduri, în cursul și după consumarea lecturii acestui opus fregean. Desăvîrșita claritate, organizarea logică minuțioasă, dorința autorului de a se face înțeles în același timp de către matematicieni, logicieni și filozofi au prezidat redactarea *Cuprinsului*; într-o oarecare măsură, efortul lui Frege de a prezenta lucrurile într-o formă cît mai accesibilă a fost dictat de neînțelegerea cu care fusese primită, înainte cu cîțiva ani, *Scrierea conceptuală*. Cu toate acestea, nici *Fundamentele aritmeticii* nu au fost receptate, la apariție, de un public mai larg, iar primirea făcută de către un matematician de prima mînă ca Georg Cantor sau de tînărul filozof Edmund Husserl dovedește că, la apariție, sensul inovator al cărții nu a fost receptat nici măcar de autorități în materie.

3 Distincția dintre număr pe de o parte și semn, cifră, numeral pe de altă parte este conținută implicit; Frege va reveni permanent la acest principiu diriguitor al concepției sale filozofice.

4 Asupra statutului logic al variabilelor a se vedea, de asemenea, explicațiile furnizate de Frege în articolele sale „Funcție și concept“ și „Ce este o funcție?“.

5 Acest pasaj cu care se deschide *Introducerea* este dătător de seamă asupra densității, fluenței și clarității prin care se distinge maniera fregeană de expoziție. În mai puțin de două pagini, filozoful german formulează explicit sau face să transpară o seamă de teze fundamentale ale filozofiei logicii: (i) distincția dintre semn și semnificat; (ii) o propoziție este ținută să semnifice un același conținut pentru mai mulți; (iii) variabilele sînt utilizate pentru a exprima generalitatea propozițiilor; (iv) numărul este un obiect determinat cu proprietăți specificabile; (v) o variabilă nu semnifică un obiect anumit.

6 Întorsătură tipic socratică a frazei, în consonanță cu reamintirea (în alineatul următor) a faptului că precondiția învățării este socraticul „știu că nu știu".

7 Johann Friedrich Herbart (1776–1841), filozof, psiholog și pedagog german, a creat sub influența idealismului leibnizian și kantian un sistem metafizic, în care privește realitatea ultimă ca absolut unitară, imuabilă și guvernată de legea necontradicției. Lui Herbart îi aparține, printre altele, încercarea de a crea o psihologie matematică.

8 Caracterizarea calculului ca gîndire agregativă, mecanică este tipică pentru orientarea posthegeliană, printre ai cărei reprezentanți se număra și Kuno Fischer. Respingînd această opinie pe care o împărtășeau, de altfel, și filozofi aflați la antipodul hegelianismului (de la Hobbes la J. Stuart Mill), Frege pune în joc universalitatea legilor gîndirii. Deși în acest context vorbește despre *legi ale gîndirii*, Frege va preciza în alte scrieri că obiectul logicii nu este nicidecum gîndirea și legile ei; logica vizează legile *gîndului* însuși, gînd care este conținut posibil al gîndirii, însă rămîne totodată obiectiv, independent de gîndire.

9 Pentru Frege nu există o logică a raționamentului matematic, deosebită de logica generală.

10 Se are în vedere înțelegerea numărului întreg ca agregat de unități indistincte.

11 Trebuie avut în vedere sensul special pe care cuvintele „concept" şi „obiect" îl capătă la Frege. Fiecare număr în parte este un *obiect*, dar toate numerele individuale cad sub *conceptul* numărului. Asupra acestei distincţii logicianul german va reveni în repetate rînduri.

12 Fundarea aritmeticii fiind înţeleasă de Frege în accepţia ei mai restrînsă, pur logică, de reconstrucţie raţională a conţinutului ei conceptual, intruziunea psihologicului pe tărîmul matematicii este condamnată fără drept de apel. Desigur că altfel se pune chestiunea atunci cînd avem în vedere studiul epistemologic al relaţiilor dintre gîndirea matematică şi gîndul exprimat în propoziţia matematică. În elucidarea întrebării: cum ajunge gîndirea să dobîndească conceptul numărului? discipline ca psihologia şi epistemologia genetică pot aduce o contribuţie semnificativă. Pe un plan superior, psihologia creaţiei matematice şi modelarea acesteia nu sînt cu totul irelevante pentru epistemologia matematicii înseşi, iar epurarea logicii şi a matematicii de orice element antropologic este chestionabilă. Reacţia lui Frege împotriva exceselor psihologiste ale vremii sale rămîne totuşi explicabilă, iar străduinţa sa de a delimita planurile logicii şi psihologiei este validabilă în absolut.

13 Reacţia împotriva materialismului istorico-naturalist, persiflarea evoluţionismului vulgar cu neprielnice răsfrîngeri în logica psihologistă a vremii nu-l conduce pe Frege în preajma vreunui proiect hegelian sau, să spunem, hipostaziant-platonic. Este afirmată, pur şi simplu, obiectivitatea adevărului matematic, independenţa lui faţă de conştiinţa umană şi de substratul material — oricare ar fi acela — al conştiinţei. Pe de altă parte, geneza şi istoricul conceptelor matematice este, potrivit lui Frege, irelevantă pentru analiza logică a conţinutului lor. În ultima chestiune a se vedea şi numeroase alte pasaje ale lucrării de faţă, precum şi nota 16.

14 Ernst Schröder (1841–1902), matematician german, a fost ultimul reprezentant proeminent al perioadei iniţiale din dezvoltarea

logicii matematice, adică perioada algebrei logicii. Ernst Schröder a perfecționat și sistematizat algebra booleană a claselor, precum și algebra relațiilor elaborată de Peirce. Printre lucrările sale, în afară de acel manual de aritmetică și algebră la care se referă Frege, se numără: *Der Operationskreis des Logikkalküls* (Leipzig, 1877) și *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (3 volume, Leipzig, 1890–1905). Schröder era logicist, considera că matematica nu este decît logică dezvoltată pe baza algebrei relațiilor sau a ceea ce am numi astăzi calcul funcțional de ordinul 1. El a anticipat și teoria tipurilor. Schröder nu a înțeles valoarea operei fundamentale a lui Frege, *Begriffsschrift* (1879), iar recenzia sa nefavorabilă a pecetluit, din cauza autorității științifice considerabile de care se bucura semnatarul ei, destinul unei cărți care a trecut aproape neobservată la apariție. Izolarea lui Frege se datorează în mare măsură incapacității lui Schröder de a înțelege noua paradigmă a logicii, neîncadrabilă în canoanele algebrei booleene.

15 Nedetectarea *de facto* trebuie deosebită de imposibilitatea principială a ivirii unei contradicții. Totuși, așa cum va preciza în lucrări ulterioare, Frege nu crede că demonstrația de necontradicție întemeiază în măsură suficientă definițiile, întrucît demonstrația rămîne oricum exterioară conținutului conceptual angajat de aceste definiții. Logicismul fregean se opune din principiu punctului de vedere formalist. Logica este știința adevărului, nu a coerenței.

16 Pentru Frege, logica reprezintă prin excelență o investigație a obiectivului, în timp ce psihologia poartă asupra subiectivului. Acestei distincții îi corespunde distincția dintre concept și obiect, pe de o parte, reprezentare pe de alta. În ansamblul lucrării de față, importanța acestui principiu director este dezvoltată îndeosebi în §§ 26, 27, 58–61. Fiecare număr individual este un obiect; faptul că nu ni-l putem reprezenta ca atare nu știrbește cu nimic obiectualitatea lui; un obiect nereprezentabil nu încetează prin acest simplu fapt să fie un obiect. Obiect fiind, numărul nu este un lucru, adică ceva subzistent în spațiu și timp, dar el nu

este nici o creație a conștiinței. La fel, nu este creație a conștiinței nici conceptul, întrucît el are în egală măsură un caracter obiectiv (cf., de exemplu, §§ 47, 48); însă conceptele sau obiectele abstracte cum sînt numerele nu au propriu-zis realitate, adică subzistență autonomă, în genul lucrurilor concret-senzoriale.

17 Acest al doilea principiu director a atras cel mai mult atenția exegeților *Fundamentelor aritmeticii*, din mai multe motive.

În primul rînd, deși Frege îi acordă în cuprinsul cărții de față o importanță deosebită (revenind asupra lui în §§ 60, 62, 106), el nu-l mai formulează explicit în lucrările lui de mai tîrziu, ceea ce i-a împins pe mai mulți cercetători proeminenți — printre care, de pildă, se numără Michael Dummett — să presupună că Frege ar fi abandonat principiul contextualității, ca incompatibil cu principiile semanticii sale; semantica fregeană prezentată în „Despre sens și semnificație" — afirmă de asemenea Dummett — pornește de la presupoziția că semnificația și sensul numelor proprii sînt date, sensul propoziției rezultînd din și depinzînd de înțelesurile părților componente.

Un al doilea motiv rezidă în utilizarea particulară atît de importantă dată de Frege, în cadrul demersului îndreptat spre obținerea unui răspuns clar la întrebările privind numărul în general și definirea fiecărui număr în parte.

În sfîrșit, acest principiu al *contextualității înțelesului* este epocal prin conținutul lui; independent de exegeza operei fregeene, el a impregnat filozofia contemporană a limbajului, sau s-a dovedit în consonanță cu ea, constituindu-se într-un adevărat topos al gîndirii veacului XX.

Din toate aceste motive, o analiză minuțioasă a principiului se impune. Ne vom limita la cîteva, esențiale, precizări.

a) Formularea literală a principiului este: „nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden". Cuvîntul *Bedeutung* nu are accepția tehnică pe care trasarea distincției *Sinn–Bedeutung* i-o va acorda ulterior (a se vedea „Despre sens și semnificație"), ci vizează în mod nediferențiat *conținutul* sau *înțelesul* cuvintelor.

b) Dependența înțelesului cuvintelor de contextul propozițional se manifestă, de bună seamă, în variația înțelesului în funcție de contextele propoziționale diferite în care cuvintele sînt inserate. Totuşi nu o asemenea interpretare a principiului contextualității avea în vedere Frege; nu variația înțelesului cuvintelor îl preocupă aici, nu această trăsătură accidentală a limbii obişnuite pe care limbajul ştiinţific este ținut s-o recuze; el vroia să spună, după toate probabilitățile, că înțelesul unor cuvinte izolate trebuie degajat din analiza unor propoziții al căror înțeles s-a dezvăluit deja într-o etapă anterioară.

c) Ceea ce afirmă Frege se poate interpreta (i) fie ca afirmare categorică a faptului că cuvintele îşi capătă înțelesul în propoziție, înțelesul cuvintelor nesubzistînd ca atare în afara contextului propozițiilor, aşa cum nici utilizarea lor nu are loc decît în şi prin propoziţii, (ii) fie numai ca sugestie că acest înţeles nu trebuie căutat ori chestionat în afara unui asemenea context. Ca atare se conturează două interpretări. *Prima* interpretare, mai tare, pare a se găsi, într-adevăr, într-o oarecare tensiune cu principiul după care semnificația unui întreg propozițional este dependentă de semnificația părţilor sale componente iar sensul propoziției este dependent de sensul părţilor componente. Acest din urmă principiu este consecinţa principiului fregean al intersubstituibilităţii, conform căruia înlocuirea unei părți a propoziţiei printr-o expresie avînd aceeaşi semnificaţie, respectiv acelaşi sens, nu modifică semnificaţia propoziției, respectiv nu modifică sensul acesteia.

A *doua* interpretare nu pare a contrazice semantica Frege-Church cu al ei principiu al dependenței funcționale a sensului şi semnificației întregului propozițional față de sensul şi semnificația cuvintelor. Ni se cere *să căutăm* înțelesul cuvintelor în contextul propozițional, nu ni se interzice însă a izola acest înţeles, localizîndu-l, de exemplu, în *definiens*-ul unei definiţii.

d) Dacă ne întrebăm acum asupra utilizării pe care Frege o conferă principiului contextualității, această a doua interpretare, care are de partea ei şi evidența textuală, se verifică prin faptul că înțelesurile cuvintelor aritmetice: *zero, unu, doi, ..., număr* sînt definite şi, ca atare, izolate; dar ele au fost desprinse tocmai din

contextul propozițional, și anume — cum vom vedea — analizîndu-se înțelesul aserțiunilor numerice, *Zahlangaben*, pentru a se preciza că aserțiunea numerică enunță ceva despre un concept, iar apoi analizîndu-se înțelesul anumitor propoziții de identitate. Analiza semnificației întregului propozițional devine o precondiție pentru degajarea semnificației expresiilor numerice, ceea ce validează principiul contextualității. Asupra mecanismului de abstragere a semnificațiilor cuvintelor care desemnează numere Frege se rostește clar: „S p r e a o b ț i n e c o n c e p t u l d e n u m ă r t r e b u i e s t a b i l i t s e n s u l u n e i i d e n t i t ă ț i n u m e r i c e“ (p. 124).

e) Corolarul operațional al principiului contextualității îl constituie ceea ce s-au numit mai tîrziu definiții contextuale (a se vedea partea IV a *Fundamentelor aritmeticii*). Motivația logico-filozofică este reliefată clar de către Frege în alineatul imediat următor, atunci cînd evidențiază solidaritatea primelor două principii. Al doilea decurge ca un corolar din primul. Într-adevăr, dacă înțelesul cuvintelor nu trebuie căutat în reprezentările asociate, care sînt numai subiective, difuze, și dacă indicarea unor entități concret-senzoriale este, în cazul unor obiecte abstracte ca numerele, impracticabilă, înțelesul unor cuvinte rămîne a fi statornicit prin analiza contextelor propoziționale în care aceste cuvinte își fac apariția.

f) Totodată, este evident că utilizăm nu cuvinte izolate, ci fraze întregi; cuvintele nu survin izolate, ci în cadrul unor structuri propoziționale. Această observație de bun-simț este potențată în cîmpul de forțe al unei concepții filozofice globaliste, holiste a cărei înrîurire s-a făcut simțită în Germania secolului XIX, ajungînd pînă la Frege. Hans D. Sluga vorbește despre o *concepție holistă a semnificației* la Frege, adversă epistemologiei atomiste, corelată, aceasta din urmă, cu o înțelegere agregativă a judecăților; opoziția lui Frege față de atomism ar deriva „nemijlocit din atacul lui Kant la adresa empirismului și a atomismului asociat“ (Hans D. Sluga, „Frege and the Rise of Analytic Philosophy“, *Inquiry*, 18, pp. 471–498, vezi în special pp. 479, 480–485). În opoziție cu Dummett, Hans Sluga conchide: „Principiul con-

textual nu a fost o simplă idee sclipitoare pe care Frege a lăsat-o ulterior deoparte. El era expresia unei viziuni filozofice fundamentale care aparține tradiției antiatomiste caracteristică pentru filozofia clasică germană. În al doilea rînd, textele demonstrează explicit că Frege a reafirmat principiul său după 1891 și cred că pînă și trăsăturile aparent recalcitrante ale concepției semantice fregeene de mai tîrziu nu pot fi clarificate decît în lumina acestui principiu“ (*op. cit.*, p. 485).

Primatul judecății asupra conceptului, primatul gîndului complet asupra părților sale se află în consonanță cu principiul contextualității; a se vedea, pentru edificare, articolul lui Frege. „Despre concept și obiect“.

g) Principiul contextualității — despre care Michael Dummett afirmă că „după toate probabilitățile este cel mai important enunț filozofic al lui Frege“ („Nominalism“, în *Philosophical Review*, 65, 4, 1956, p. 491) — a fost reluat și extins în filozofia contemporană a limbajului de către gînditori de talia lui Wittgenstein și Quine.

În *Tractatus logico-philosophicus*, principiul intră în textura unei concepții atomiste a limbajului. Ludwig Wittgenstein îl reafirmă în aforismul 3.3: „Numai propoziția are sens; numai în contextul propoziției numele posedă semnificație“, ca și în 3.314: „Expresia are semnificație numai în cadrul propoziției. Fiecare variabilă poate fi privită ca o variabilă propozițională. (Inclusiv numele variabil.)“ Dar în același timp, Wittgenstein scrie: „Eu înțeleg propoziția — la fel ca Frege și Russell — ca funcție de expresiile pe care ea le conține“ (3.318).

Ulterior, așa cum se știe, Wittgenstein a îmbrățișat o concepție holistă, sistemică a semnificației care debordează cadrul îngust al logicii. Cuvintele sînt văzute ca dobîndindu-și semnificația în cadrul jocurilor de limbaj, activități lingvistice complexe, părți mari ale fluxului gîndirii și vieții; semnele funcționează, prind viață înăuntrul întregului sistem semiotic.

18 Cf. § 97 din *Fundamentele aritmeticii* și articolul „Despre concept și obiect“.

19 Pentru „număr“, Frege folosește atît expresia „Anzahl“, care vizează numărul cardinal, cît și termenul mai general „Zahl“; în

timp ce „Zahl" îmbrățișează în sfera sa orice număr — de exemplu cele negative, reale, complexe —, „Anzahl" poate fi numai 0 sau un număr întreg pozitiv. Traducerea noastră nu a reținut această distincție, cu neputință de a fi redată fidel și natural, însă contextul permite întotdeauna deslușirea sferei de cuprindere a expresiei „număr".

20 Deși Frege nu menționează ca atare demersul axiomatic sau metoda deductivă, despre acestea este totuși vorba aici. În matematică funcția demonstrației nu este numai de a conduce la adevăruri noi, ci și de a conecta între ele adevărurile într-un sistem deductiv; urmărim deducerea a cît mai multe adevăruri din cît mai puține, fundamentale. Descoperirea adevărurilor primare, originare, este punctul către care trebuie să năzuim, spre a ne întoarce de acolo la teoreme, pe traiectul demonstrațiilor riguroase.

21 Aluzie la procedeele logice, puține la număr și tipice, aplicate într-o diversitate de cazuri. Demersul deductiv evidențiază repetitivitatea metodelor de definire și de demonstrare.

22 Conceptele amintite — introduse de Kant în *Critica rațiunii pure* — izvorăsc din distincțiile între adevăruri necesare și contingente, raționale și de fapt, distincții trasate de către Hobbes, Leibniz, Hume și Kant, și comportînd atît aspecte pur logice cît și epistemologice. Discutarea acestei distincții a constituit axa controversei între empirismul și raționalismul secolelor XVII–XVIII. Cf., de exemplu, cartea lui Mircea Flonta, *Adevăruri necesare?* (Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975; v. în special cap. I, II, pp. 13–28).

23 Deși Frege începuse prin a spune că el nu atribuie un sens nou distincțiilor filozofice puse în joc, precizările sale au semnificația unei adevărate regîndiri a întregii probleme. În primul rînd, distincția analitic–sintetic nu mai este considerată exclusiv la nivelul judecăților „în care este gîndit raportul dintre un subiect și un predicat" (Kant), adică la nivelul logicii tradiționale. Pînă și un gînditor de talia lui Leibniz, care în alte privințe a anticipat viziunea logistică, rămînea tributar aici paradigmei tradiționale.

În al doilea rînd, pentru Leibniz şi Kant, adevărurile analitice se arată a fi cele reductibile la o expresie deductibilă din legea identităţii sau aceea a necontradicţiei, precum şi din definiţii; legile logice generale pe care Frege le are în vedere aparţin însă logicii propoziţiilor şi predicatelor.

O propoziţie analitică este deci, pentru Frege, una deductibilă din propoziţiile adevărate ale logicii. Acestea din urmă sînt *per definitionem* analitice. V. şi nota 25.

24 Propoziţiile *a posteriori* sînt, prin urmare, factuale iar demonstraţia lor se bazează pe ceea ce mai tîrziu aveau a se numi propoziţii atomare. Este unul dintre puţinele pasaje din opera lui Frege în măsură de a sugera că trebuie să admitem cumva propoziţii atomare, respectiv fapte atomare — ipoteză fundamentală pe care se reazemă *Tractatus logico-philosophicus*. Să se observe însă că nu orice adevăr fără generalitate care cuprinde un enunţ despre obiecte determinate este *eo ipso* factual; el mai trebuie să fie şi indemonstrabil. Propoziţiile singulare din aritmetică, de exemplu „2 este mai mic decît 3“, sînt şi ele enunţuri singulare despre obiecte determinate, rămînînd totuşi, pentru Frege, *a priori*.

25 Această remarcă este întru cîtva consonantă cu ideea analiticităţii ca rezolubilitate a unui complex în elementele sale mai simple, idee pe care atît Leibniz cît şi Kant o reliefaseră cu stăruinţă, deşi în contexte şi ţeluri divergente. Astfel, Kant: „Judecăţile analitice ... le-am putea numi şi *judecăţi explicative*, fiindcă... nu adaugă prin predicat nimic la conceptul subiectului, ci numai îl descompun prin analiză în conceptele lui parţiale, care erau deja gîndite în el (deşi confuz)“ (*Critica raţiunii pure*, Ed. Ştiinţifică, 1969, pp. 48–49). Sau: „judecăţile analitice nu extind deloc cunoştinţa noastră, ci... conceptul, pe care îl am, este descompus şi îmi este făcut inteligibil mie însumi“ (*ibid.*, p. 49). — Nu putem omite însă nici deosebirea substanţială dintre cele două modalităţi de abordare. Pentru Leibniz şi Kant, o propoziţie analitică este des-facere clarificatoare a unui conţinut primar, deci analiză *in actu* suprapusă peste sinteza judicaţională, în timp ce pentru Frege, propoziţiile analitice sînt mai curînd cele rezolubile dar

nu încă rezolvate în conceptele mai simple şi totodată mai generale. Totodată, Frege, preocupat să separe conţinutul obiectiv al propoziţiilor de raportarea la acest conţinut a subiectului care judecă nu reţine, în caracterizarea din § 3 a adevărurilor analitice, ideea caracterului neinformativ al acestora din urmă. Logica şi matematica nefiind pentru Frege construcţii lingvistice, obiectele şi conceptele logice nefiind ficţiuni, adevărurile logice se prezintă ca obiective şi informative pe măsura universalităţii lor. Mai mult: întrucît punctul de plecare în logica fregeană nu este conceptul, ci judecata, adevărurile analitice nu mai au cum să desfăşoare concepte preexistente; ele provin din adevăruri iniţiale.

26 Trecînd în revistă ideile lui Hobbes, Locke, Newton, precum şi ale altor filozofi moderni, Frege trimite în repetate rînduri la cele două volume ale cărţii *Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt* a lui Joh. Julius Baumann (Berlin, Druck und Verlag vom Georg Reimer, 1868). Cartea, o antologie comentată, îşi propunea să urmărească influenţa pe care matematica o exercită încă de la începuturile epocii moderne asupra elaborării conceptelor şi metodelor filozofice; în mod deosebit era relevată înrîurirea concepţiei despre matematică asupra conceptului de filozofie, asupra metodei şi logicii celor mai de seamă cugetători din secolele XVII–XVIII.

Pasajele din Hobbes, Locke, Newton la care se face aluzie sînt luate din: Hobbes, *Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae*, Amsterdam, 1668, Dialogurile I–III, în special I, p. 19, şi III, pp. 62–63; Locke, *Eseu asupra intelectului omenesc*, Cartea a IV-a, capitolele IV, § 6, şi VII, §§ 6, 10; Newton, *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, vol. I, cap. I–III.

27 Vezi *Critica raţiunii pure*, în traducerea lui Nicolae Bagdasar şi Elena Moisuc, Ed. Ştiinţifică, 1969, pp. 191–192.

28 Hermann Hankel (1839–1873), matematician german, a dezvoltat ideile lui Riemann; a adus contribuţii în teoria funcţiilor, în istoria şi filozofia matematicii.

29 Vezi *Critica rațiunii pure*.

30 Hermann Günther Grassmann (1809–1877), matematician și sanscritolog german, este unul din întemeietorii calculului vectorial și tensorial modern. Cartea sa *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844, ediție revizuită, 1862) a trecut aproape neobservată la apariție. Calculul lui Grassmann cu mărimi extensive compuse din *n* unități reprezintă o geometrie *n*-dimensională corespunzătoare unui calcul numeric generalizat. Ca unul din pionierii algebrei abstracte, Grassmann a formulat principiile unei metode de generalizare succesivă a operațiilor cu numere, pe care le trata în spirit abstract, considerînd exclusiv proprietățile lor pur combinatorii. Față de acest demers abstractizant care presupune punerea între paranteze a conținutului conceptual al operațiilor, Frege a manifestat serioase rezerve de ordin filozofic.

31 John Stuart Mill (1806–1873), logician și economist englez, a dezvoltat o concepție empiristă asupra logicii în cunoscutul său *System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation* (Londra, 1843). Pentru ideile directoare ale logicii lui Mill, vezi și *Dezvoltarea logicii* de W. și M. Kneale (vol. I, traducere de Cornel Popa, Ed. Dacia, 1974, pp. 395–401).

32 Definiția genetică a numerelor naturale este acceptată de către Frege, însă acesta din urmă, pe de o parte, respinge întemeierea empiristă à la Mill, iar pe de altă parte consideră că se poate merge mai departe, traducîndu-se în termeni pur logici definiția obișnuită a unui număr natural dat ca rezultînd prin adăugarea unei unități la predecesorul său imediat.

33 Într-adevăr, numărul 0 este o achiziție relativ tîrzie. În matematica europeană, el reprezintă un împrumut din matematica indiană, mijlocit de arabi.

34 Adevărul unei propoziții matematice este independent de modul în care ajungem să-l stabilim, susține Frege. *A fortiori*, el

nu trebuie pus în dependență de factori empirici ori psihofiziologici. Frege înțelege deci să despartă complet epistemologia genetică de considerațiile logico-gnoseologice referitoare la natura adevărurilor matematice, la conținutul pe care acestea le exprimă. În spirit raționalist, Frege va preciza, nu o dată, în cuprinsul *Fundamentelor aritmeticii*, că aplicabilitatea la experiență nu dovedește conținutul intrinsec empiric al propozițiilor matematice (a se vedea și nota 12).

35 *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*. Afirmația lui Philalèthe se inspiră din Locke (*Eseu asupra intelectului omenesc*, cartea II, cap. XVI, § 5); vezi ed. rom., vol. I, Ed. Științifică, 1961, p. 185.

36 Este voba, evident, despre spațiul obișnuit, euclidian, considerat ca omogen și izotrop și abstracție făcînd de orice sistem de coordonare care i s-ar putea asocia.

37 Proprietățile aritmetice — și în general matematice — ale numerelor nu sînt contingente, spre deosebire de proprietățile lor legate de aplicabilitatea conceptelor și propozițiilor aritmetice. Astfel, proprietățile lui 5 de a fi impar, prim, egal cu 2 + 3 etc. sînt necesare și totodată decurg în mod necesar din definițiile numerelor respective, precum și din aceea a adunării; dimpotrivă, proprietatea lui 5 de a fi identic cu numărul degetelor unei mîini este contingentă. Însă, întrucît aritmetica are a se ocupa numai de proprietățile pure ale numărului, inducția nematematică nu ne poate fi de nici un folos, iar considerațiile lui Mill despre sursa inductivă a adevărurilor aritmeticii se dovedesc, în această ordine de idei, irelevante. Cu atît mai puțin se poate spera să obținem legile generale ale aritmeticii prin inducție empirică, à la Mill.

38 Previziunea lui Frege s-a confirmat întru totul: logica inductivă de astăzi se sprijină pe teoria probabilităților și este o disciplină cu un grad înalt de matematizare.

39 Pasajele la care se face aluzie sînt din *Avant-Propos* și cap. I al Cărții I din *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*.

40 Cf., ed. rom., 1969, p. 65.

41 Frege admite fără ezitare caracterul sintetic al propozițiilor geometriei; totuși, cum vedem, el nu se pronunță în mod explicit asupra naturii lor apriorice. Nu se poate presupune că Frege ar avea oarecari reticențe în a îmbrățișa *dictum*-ul kantian asupra apriorismului axiomelor geometriei, căci el aderă explicit la acesta în § 89, dar este curios că aici el *pare* a pune geometria în rîndul științelor empirice. Pe de altă parte, o intuiție spațială care poartă numai asupra experienței reale, nu și asupra celei imaginare, poate fi numai aceea a spațiului euclidian. Spațiile neeuclidiene nu sînt direct intuibile, însă pot fi *gîndite*, în pofida faptului că ele contrazic intuiția.

Spre sfîrșitul vieții sale, Frege a abandonat total doctrina logicistă, ajungînd să vadă în „sursa geometrică a cunoașterii" — pe care o caracterizează ca pe „acea sursă de cunoaștere din care izvorăsc axiomele geometriei" — *axiome* în accepția lor originară de adevăruri intuitive — fundamentul întregii matematici, inclusiv al aritmeticii.

42 Este vorba despre *Scrisoarea către Gabriel Wagner, Despre Utilitatea Artei Rațiunii sau Logica* (1696).

43 În *De Scientia Universali seu Calculo Philosophico*, Leibniz scrie: „Discrimen inter veritates necessarias et contingentes vere idem est, quod inter numeros commensurabiles et incommensurabiles; ut enim in numeris commensurabilibus resolutio fieri potest in communem mensuram, ita in veritatibus necessariis demonstratio, sive reductio ad veritates identicas locum habet".

44 Vezi *Corespondența lui Leibniz cu Arnauld*, în G. W. Leibniz, *Opere filozofice — I* (Ed. Științifică, p. 204). Potrivit lui Leibniz, nu numai adevărurile rațiunii, ci și cele de fapt, contingente, ar fi aprioric demonstrabile; demonstrația lor ar presupune însă preștiința divină, pe care Leibniz o și postulează, în tentativa extrem-raționalistă de a privilegia lumea reală ca optimă, deci ca minimal rea. W. Kneale rezumă astfel poziția lui Leibniz: acesta „susține

în mod pregnant că toate propozițiile adevărate, inclusiv cele singulare, sînt identități virtuale, deși singur Dumnezeu le poate cunoaște *a priori.* Există desigur o distincție între adevărurile rațiunii, care sînt valabile pentru toate lumile posibile, și adevărurile de fapt, care sînt într-un sens contingente, deoarece ele depind de voința lui Dumnezeu și sînt valabile numai pentru lumea reală. Dar principiul rațiunii suficiente ne asigură că chiar adevărurile de fapt sînt necesare, întrucît nimic nu se întîmplă fără un temei. În *orice* propoziție adevărată, conceptul subiect conține conceptul predicat și deosebirea dintre adevărurile rațiunii și adevărurile de fapt rezidă pur și simplu în aceea că ultimele nu pot fi demonstrate fără referire la acea superioritate a realului care l-a determinat pe Dumnezeu să le aleagă dintre toate lumile posibile" (William Kneale și Martha Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. 1, p. 356). Pentru o discuție mai amănunțită, a se vedea, de ex., capitolul III: „Propozițiile contingente și legea rațiunii suficiente" din cartea lui Bertrand Russell despre Leibniz (*La philosophie de Leibniz*, trad. franc., Alcan, 1908) și cap. 25 din *G. W. Leibniz. Viața și personalitatea filozofică* de Dan Bădărău (Ed. Științifică, 1966).

45 W. Stanley Jevons (1835–1882), economist și logician englez, reformator al algebrei lui Boole și pionier în proiectarea mașinilor logice. Jevons a reușit să simplifice calculul logic, înlocuind disjuncția exclusivă a lui Boole cu disjuncția inclusivă, ale cărei legi sînt duale cu legile conjuncției. A eliminat totodată substracția și diviziunea logică din rîndul operațiilor folosite în algebra logicii. A dezvoltat o concepție logicistă asupra matematicii. Lucrarea principală a lui Jevons, *The Principles of Science* (Londra, 1874; ed. a 2-a, 1877), la care se referă în cîteva rînduri și Frege, dezvoltă ideile logicianului englez în domeniul metodologiei științei și descrie „pianina logică", un strămoș al computerelor de astăzi.

46 J. S. Mill, *op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 2.

47 Secțiunea este semnificativă pentru filozofia fregeană a logicii; respingerea totală a formalismului gol, a concepției după

care putem opera cu semne lipsite de conținut, a stat întotdeauna printre preocupările celui ce a elaborat *Scrierea conceptuală*. O întreagă istorie se află în spate. Tradiția nominalistă engleză îl condusese pe Hobbes la teza că a gîndi înseamnă a calcula. Venită pe continent, această idee intră, cu Leibniz, pe făgașul raționalismului, calculul fiind visat ca un mod privilegiat de a gîndi prin intermediul unui instrument perfect de analiză și compunere a ideilor. Întoarsă pe pămînt britanic, după un secol și mai bine, echivalarea gîndirii cu calculul prezidează prin Boole constituirea algebrei logicii. A opera cu semne potrivit unor reguli formale, abstracție făcînd de interpretările conferibile formulelor simbolice, devine un procedeu de prestigiu, extrapolat dincolo de granițele algebrei. Aparatul formal al logicii dovedindu-se o algebră, gîndul că algebra, și cu ea matematica întreagă, ar fi la rîndul ei o logică evoluată (cf. secțiunea precedentă) era firesc să capete prestigiu. Dar întrucît logica devenise calcul logic, cu formule susceptibile să capete felurite interpretări și manipulate *ca și cum* nu ar fi avut actualmente nici una, se consolidase prejudecata că a calcula înseamnă a nu gîndi ori a gîndi în gol. Reacția lui Mill împotriva manipulării iscusite și artificioase a semnelor de limbaj nu însemna nicidecum o repunere a gîndirii în drepturile ei; ea izvora numai din tentația unei resorbiri a matematicii în empiria faptelor observabile. A gîndi, pentru Mill, înseamnă a agrega inductiv și a segrega deductiv observațiile făcute asupra lucrurilor sensibile. În replică, Frege reafirmă crezul normal al matematicianului, care vede în activitatea sa nu un balet mecanic al semnelor, ci o supremă creație rațională. Dacă deci Hobbes spusese că a gîndi înseamnă a calcula, iar Mill, de altfel tot în spirit nominalist, ajunsese să creadă că a calcula înseamnă a nu gîndi, Frege va deplasa accentul *dictum*-ului hobbesian și totodată îl va contrazice formal pe Mill: a calcula înseamnă tocmai a gîndi. Dacă aritmetica nu este a pietricelelor și a turtelor dulci (a se vedea Introducerea lui Frege la opusul de față, p. 42), ea nu este nici a semnelor lipsite de orice conținut: „este posibil ca limbajul simbolic al matematicii să fie astfel construit, prin intermediul gîndirii reale, încît ulterior, ca să spunem așa, să gîndească el pentru noi"

(tot Introducerea, pp. 38–39). Pentru Frege, semnele lipsite de conținut sînt inoperante; ele sînt simple obiecte materiale cu care nu se poate face nimic, întrucît nu comunică nimic. Semnul incorporează întotdeauna, face sensibil un conținut de gîndire, reificîndu-l. Folosirea unui limbaj simbolic prezintă multiple avantaje, printre care acela al prezentării intuitiv-sensibile a structurii logice a matematicii, dar în nici un caz nu epurează matematica de conținutul ei, de gînd.

În poziția de principiu a lui Frege se ascunde însă, totodată, o anumită lipsă de receptivitate față de demersul algebrei logicii. Frege nu crede că forma se poate separa efectiv de interpretare, nu acceptă că un aparat simbolic poate fi manipulat exclusiv pe baza unor reguli de calcul, abstracție făcînd de orice interpretare. Conținutul unui calcul — crede el — nu poate fi pur operațional, conferit așadar de reguli stipulate după bunul plac, interpretarea este subînțeleasă; orice formulă are un conținut conceptual *ab initio*, altfel nici nu l-ar putea primi ulterior, pluralitatea interpretărilor adăugîndu-se numai unui conținut general gîndit acolo din capul locului. — Dificultatea lui Frege în a înțelege fecundarea axiomaticii formale propusă de Hilbert spre sfîrșitul veacului XIX a fost reversul insistenței sale de a arăta că a calcula înseamnă a gîndi.

48 Așadar, dacă aritmetica este un sistem ipotetico-deductiv, teoremele ei vor fi totuși propoziții analitice, și anume implicații; dar o propoziție analitică de forma unei implicații poate fi alcătuită din componente sintetice.

49 În *Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, Newton scrie: „Per *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus" (ed. 1732, p. 4). (Prin număr înțelegem nu atît o mulțime de unități cît raportul abstract al unei cantități oarecare față de o altă mărime de același gen, luată [de noi] ca unitate.)

50 Asupra tratării acestei probleme la Euclid și în întreaga gîndire matematică elină, a se vedea cap. II — Secțiunea C. Teoria

proporţiilor, din O. Becker, *Fundamentele aritmeticii*, Ed. Şt., 1968, p. 117.

51 Secţiunile subsumate acestui titlu (§§ 21-25) urmează să analizeze şi să răspundă negativ la întrebarea dacă numărul nu este cumva o proprietate a lucrurilor sensibile. *Sensul* acestei întrebări trebuie în prealabil statornicit cu grijă. În unele contexte, „proprietate" (*Eigenschaft*) şi „concept" sînt termeni pe care Frege îi apropie ca înţeles. De aceea, s-ar putea crede că întrebarea formulată în titlul de mai sus ar admite parafraza: este numărul un concept de ordinul întîi? (asupra distincţiei de ordin între concepte a se vedea § 53, *in fine*). Totuşi, lucrurile nu stau aşa. Consideraţiile lui Frege sînt îndreptate împotriva înţelegerii numărului ca proprietate şi ca abstras din lucruri în acelaşi fel ca proprietăţile generale ale lucrurilor sensibile. După Ignacio Angelelli: „Pare necesar să interpretăm accepţia pe care Frege o dă aici lui «Eigenschaft» ca însemnînd mai curînd *accident* şi, mai precis, *accident individual*, întrucît *aici* Frege presupune următoarea axiomă: dacă F este o proprietate a unui lucru exterior (fizic, sensibil), atunci F însuşi este extern (fizic, sensibil). *Eigenschaften* sînt concepte şi, potrivit înţelegerii fregeene a conceptelor, nu este adecvat să considerăm că conceptul *a fi o piatră* este mai «sensibil» sau mai «fizic» decît conceptul *a fi rădăcină pătrată din 2*. Or, dacă aici s-ar viza acest mod normal de înţelegere a proprietăţilor, ar fi imposibil să înţelegem argumentul lui Frege că numerele nu pot fi proprietăţi ale lucrurilor sensibile, întrucît ele se aplică şi la entităţi non-sensibile. Pentru a înţelege acest argument este necesar să presupunem axioma menţionată mai sus. Dar atunci întrebarea generală: «Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?» trebuie reformulată propriu-zis ca: «Este oare numărul un lucru exterior (fizic, sensibil)?» În plus, mai întîlnim unele referiri la posibila întrebare dacă numerele nu sînt cumva proprietăţi (concepte) sau obiecte în sens «logic», dar aceste referiri sînt accidentale" (I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1967. p. 232).

52 Folosirea unui cuvînt în formă adjectivală și în construcție atributivă este unul din criteriile care indică statutul său de termen conceptual și nu de nume propriu. În cazul numărului însă, aparențele limbajului obișnuit sînt înșelătoare: numărul nu este utilizat ca predicat sau atribut; vom vedea că este un obiect, fiind ca atare desemnat de un nume propriu.

53 Moritz Cantor (1829–1920), matematician și istoric al matematicii.

54 Frege, evident, nu poate primi acest argument. El nu contestă geneza empirică a aritmeticii, nici aplicabilitatea numărului în domeniul lumii fizice, dar crede că asemenea observații nu sînt relevante pentru chestiunea în discuție. Procesul de obținere a numărului nu este de aceeași natură cu procesul prin care abstragem din lucruri proprietățile lor sensibile, reținînd ceea ce aceste proprietăți au general și comun; pe de altă parte, așa cum se va lămuri mai jos, numărul este aplicabil *nu numai* în domeniul lucrurilor concret-sensibile, deci este greșit a-l identifica unei proprietăți ca greutatea sau culoarea lucrurilor.

55 Este, prin urmare, un non-sens a vorbi despre numărul *unui* obiect. Întrebarea al cărei răspuns constituie o aserțiune numerică (*Zahlangabe*) nu are aceeași structură ca întrebarea: ce greutate sau ce culoare are obiectul acesta? Pe de altă parte, așa cum va arăta în continuare Frege, dacă mă întreb asupra numărului unor *obiecte*, eu subsumez totodată obiectele în cauză unui *concept* și tocmai acestuia din urmă îi revine numărul. Întrebînd, spre exemplu, cîte *cărți de joc* conține un pachet, răspunsul poartă asupra conceptului *Carte de joc din pachetul de față*.

56 În bună tradiție scolastică, putem parafraza după cum urmează: numărul nu este accident al substanței individuale, așa cum este o anumită culoare în raport cu lucrul sau cu acea parte a lucrului care manifestă o anumită culoare, fiind astfel purtătorul real al acesteia.

57 Să se observe că Frege spune: numărul revine unui anume ceva în raport cu un mod arbitrar de concepere, și, nicidecum: numărul revine în mod arbitrar acestui ceva. Arbitrarietatea pusă în joc aici este analoagă acelui bun plac, de pildă, care, fără a ține de răspunsul la o întrebare, ține de posibilitatea formulării întrebării. Căci am libertatea de a pune o întrebare sau alta, în legătură cu unul și același lucru, în funcție de modul în care îl concep: o dată fixată însă, întrebarea corectă admite un singur răspuns corect. Numărul nu ne este dat în senzație; ceea ce ne este dat în senzație, după Frege, este perfect obiectiv (chiar dacă, așa cum se va preciza în alte locuri, organele de simț introduc un anumit element subiectiv, acesta din urmă nu alterează cu nimic faptul că senzația are o sursă obiectivă și este un mijloc de cunoaștere obiectivă). Proprietățile senzoriale îi revin lucrului în mod obiectiv; nefiind o asemenea proprietate, determinarea numerică este arbitrară în sensul de mai sus; dar această arbitrarietate nu trebuie înțeleasă ca introducînd un element subiectiv sau convențional, decît în același sens în care este subiectivă, de exemplu, alegerea unei întrebări și nu a alteia dintr-un set întreg de întrebări ce se pot formula în legătură cu un anumit obiect. Așa se explică insistența lui Frege în a demonstra că numărul nu este ceva de ordin subiectiv (a se vedea îndeosebi §§ 26, 27) și că aserțiunea numerică „exprimă ceva real, independent de modul nostru de a privi lucrurile" (§ 47), obiectivitatea adevărului ei fiind solidară cu aceea a conceptului pus în cauză.

58 *Eseu asupra intelectului omenesc*, Cartea a II-a, cap. XVI, § 1 (cf. ed. rom., Ed. Șt., 1961, vol. I, p. 184).

59 Fragmentul avut în vedere este desprins din faimoasa *Dissertatio de Arte Combinatorica*: „Falso autem scholastici crediderе numerum ex sola divisione continui oriri, nec ad incorporea applicari posse. Est enim numerus quasi figura quaedam incorporea, orta ex unione entium quorumcunque, v. g. DEI, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt quatuor. Cum igitur numerus sit quiddam universalissimum, merito ad Metaphysicam pertinet" (ediția Erdmann, p. 8).

60 Din *Historia et Commendatio Linguae Charactericae Universalis Quae Simul Sit Ars Inveniendi et Judicandi* (vezi ed. Erdmann, p. 162).

61 Altfel spus, „triunghiular" în cazul de față nu mai trebuie asociat proprietății de a avea trei unghiuri, ci unor impresii senzoriale nemijlocite.

62 Oarecum în treacăt, Frege rezumă în această frază ceea ce delimitează propria lui epistemologie a aritmeticii de epistemologia tradițională. Cum am mai spus, modul în care, pornind de la percepția obiectelor concret-senzoriale, subiectul cognitiv ajunge să opereze cu numere naturale nu este nicidecum analog modului în care se abstrage o proprietate comună mai multor obiecte; perceperea triunghiului declanşează aşadar o activitate intelectuală „care conduce la o judecată în cadrul căreia intervine numărul 3". Esenţa chestiunii rezidă în faptul că numărul apare în şi prin judecata numerică, aşa cum se va arăta mai jos, ceva mai detaliat. Judecata numerică este produsul unei activități intelectuale: numărarea, al cărei preludiu este fixarea unui concept, în vederea stabilirii numărului obiectelor care cad sub acesta.

63 Semnele sînt semne numai în măsura în care au un conţinut, o semnificație; interesează, de aceea, nu proprietăţile lor materiale, ci proprietăţile care decurg din regulile lor de folosință, potrivit semnificaţiei ce li se conferă. Astfel, nesaturarea expresiilor care desemnează funcţii manifestă o proprietate a funcţiilor înseşi.

64 Diferența numerică corespunde unei diferenţe nu fizice, dar conceptuale. Numere diferite se atribuie unor concepte diferite.

65 *An Essay towards a new Theory of Vision*, § 109.

66 După ce a arătat că numărul nu este o entitate fizică sau o proprietate fizică, Frege trece la combaterea punctului de vedere subiectivist. La întrebarea: este numărul ceva subiectiv? Frege va răspunde cu o categorică negație. Critica sa — după cum remarcă

I. Angelelli (*op. cit.*, pp. 232–233) — vizează două ținte: pretenția demersului psihologist de a lua locul investigației aritmetice și conceperea numărului ca reprezentare. A fi ceva subiectiv înseamnă în sensul tare a fi o reprezentare, *conceptus subiectivus*, accident individual al unui cuget individual. În sens mai slab, remarcă în continuare Angelelli, subiectivul implică o referire la subiect, dar nu la ceea ce este individual în subiect, ci la ceea ce acesta are comun cu întreaga clasă a subiecților individuali. Această „subiectivitate transcendentală" ar coincide cu „obiectivitatea transcendentală", obiectivitatea în sens slab care rezidă în însușirea de a fi accesibil și același pentru toate cugetele individuale. Or, „în timp ce Frege are în mod clar cele două sensuri ale «obiectivului» (deși nu introduce denumiri distincte pentru ele), el are numai o singură accepție a «subiectivului» — cea tare. În această accepție, numerele nu sînt subiective, adică nu sînt *Vorstellungen*, ceea ce din capul locului este limpede" (Angelelli, *op. cit.*, p. 234).

67 Compararea matematicii cu geografia, a numerelor cu munții sau mările, revine în mai multe rînduri sub pana lui Frege. Matematica este prin excelență, pentru dînsul, descoperire și nu invenție, matematicianul fiind explorator al tărîmului obiectiv. Obiectivitatea este aici înțeleasă în sensul tare, primordial: independență față de subiect.

68 Așadar, determinarea numerică (*Zahlangabe*) poate fi sintetică a posteriori, numerele fiind utilizabile în cadrul enunțurilor factuale; de aici se năștea și iluzia empiristă a înțelegerii numărului ca entitate de ordin fizic.

69 Raportul obiectiv–real pus aici în joc de către Frege clarifică orientarea sa ontologică; fiind de găsit la Kant, distincția este susceptibilă să alimenteze cu argumente ipoteza orientării kantiene a lui Frege. Trebuie să amintim însă că la Kant obiectivitatea coincide cu subiectivitatea transcendentală, adică presupune raportarea la subiectul în genere, în timp ce Frege omite *aici* (nu însă în alte locuri, d. ex. în § 105, primul alineat) distincția kantiană. Altfel spus, Frege înțelege obiectivitatea în sensul tare și

primar al cuvîntului, ca independență față de conștiința umană. Totodată, Frege atribuie gîndirii funcția de a recunoaște, de a reconstrui, însă nu și de a construi domeniul obiectivului, ceea ce, deși nu presupune o desolidarizare categorică de doctrina kantiană, reprezintă în orice caz o mutare semnificativă de accent într-o chestiune crucială. Epurate de bogatele conotații gnoseologice din scrierile lui Kant, termenii „obiectiv" și „real", chiar dacă vor. fi fost împrumutați de Frege direct sau în ultimă instanță de la Kant, ajung să propună o ontologie realistă, distanțată atît de excesul platonician cît și de constructivismul transcendental-subiectiv kantian. În concordanță cu acest mod de a înțelege ontologia lui Frege se află refuzul de a echivala obiectivul cu realul.

70 Argumentul materialismului *dialectic* nu este altul; pare destul de evident că Frege raționează aici la un nivel superior materialismului istorico-naturalist al epocii. Printre puținii contemporani în măsură să aprecieze un asemenea raționament s-ar fi putut număra Engels.

71 Sensul acestei observații pierde din încărcătura sa specific kantiană, dacă reținem că pentru Frege „elementul logic, conceptual, judicabil" nu este opera intelectului, nu este operă umană, nu este rezultatul unei construcții a subiectului individual sau măcar a subiectului generic. Să menționăm, totodată, că o conotație a „obiectivului" este, potrivit lui Frege, capacitatea de a fi comunicabil. De unde am putea specula că obiectivitatea în sensul tare este chiar pentru logicianul de la Jena garantul și suportul obiectivității în sensul mai slab de a fi cognoscibil, de a fi accesibil și același pentru toți.

72 „Evaluarea estetică" trimite aici, de bună seamă, la ceea ce este dincoace de frumos sau urît, la accepția primară a „esteticului", restituită de Kant: receptare prin simțuri, sensibilitate.

73 *Gedankenexperiment*-ul imaginat de Frege merge dincolo de Kant, întrucît își propune să arate că elementul subiectiv înglobat în orice intuiție sensibilă este depășit prin opera rațiunii, fără concursul unui element *a priori*. Subiectiv, pentru Frege, este ceea

ce prin excelență poate fi într-un fel sau altul, pentru cineva sau altcineva, în timp ce obiectiv este ceea ce se prezintă ca același pentru toți. Subiectivitatea senzației este depășită în obiectivitatea gîndirii. În timp ce traducerea cuvintelor în intuiții proprii constituie o decodare subiectivă, traducerea intuițiilor proprii în cuvinte asigură comunicarea unui conținut obiectiv. În folosirea lor primordială, cuvintele au același sens pentru toată lumea, tocmai pentru că sensul lor nu stă în intuiția specifică ce traduce cuvîntul în lumea interioară a unei ființe raționale sau alta; judecățile adevărate (spre pildă teoremele geometrice) ajung a fi recunoscute ca adevărate de către toată lumea, inclusiv de ființe raționale ale căror intuiții spațiale diferă în mod radical de ale noastre, fiindcă cuvintele își păstrează același sens. Dar aceasta presupune nu numai faptul că în cuvînt este reținut, spre a fi comunicat, elementul comun al intuițiilor diferite (diferența dintre intuițiile sensibile provenite din una și aceeași sursă nici măcar nu se lasă descrisă nemijlocit în cuvinte, deși putem să facem aluzie la ea în discurs), acest element comun fiind înțelesul, același pentru toți, al cuvîntului; mai trebuie să presupunem și că sensul cuvintelor trebuie căutat în contextele propoziționale în care intră. Într-adevăr, ar fi cu neputință a ne sustrage următoarei alternative: sau înțelesul cuvintelor este condamnat să fie diferit, în funcție de reprezentările și intuițiile diferite care le sînt asociate (ceea ce Frege nu admite decît parțial, el trasînd o distincție între sensul cuvintelor și nuanțele, coloritul lor specific), sau înțelesul cuvintelor va fi același pentru toată lumea. Or, înțelesul trebuie să fie același, de vreme ce comunicarea între oameni prin intermediul limbajului și cunoașterea adevărului obiectiv sînt indiscutabile. În al doilea caz, cel admis și de Frege, rămîne un mister cum cuvintele ar mai putea păstra același înțeles — intuițiile asociate cuvîntului izolat fiind diferite — dacă acest înțeles nu ar fi contribuția adusă de cuvîntul izolat nu numai la sensul, dar și la adevărul unor propoziții. Prin faptul că recunoaștem adevărul unor judecăți comunicate în propoziții dovedim că putem depăși subiectivitatea intuiției, plasîndu-ne pe un teren comun tuturor ființelor raționale. Principiul contextualității semnificației este, cum vedem, angajat la rîndul său în această încercare de explicație.

74 Dependența obiectivității față de rațiune este de ordin gnoseologic, nu ontologic; Frege însuși nu spune, în fond, altceva. Rațiunea nu este aici demiurgul, ci temeiul; ea recunoaște ceea ce este adevărat, independent de conștiința umană, ajunge astfel la ceea ce este obiectiv, corectînd acolo unde este cazul subiectivitatea intuiției sensibile. Rațiunea recunoaște și cunoaște ca atare ceea ce este *în afara* subiectului, de exemplu numerele. Astfel, în recenzia cărții lui Husserl *Philosophie der Arithmetik*, Frege caracterizează numerele „în sine", numerele „reale" ca numere obiective, *întru totul independente față de gîndirea noastră* (în ediția *Kleine Schriften*, Georg Olms, 1967, la pp. 191–192).

75 Oskar Schloemilch (1823–1901), matematician german, autor al mai multor manuale și cursuri care s-au bucurat de o largă circulație în epocă.

76 Frege consideră că înțelesul (*Bedeutung*) unui cuvînt nu este subiectiv, nu aparține intuiției individuale; tocmai de aceea semantica fregeană nu rămîne tributară subiectivității. Vezi și nota 73. -- Aceeași idee este întru cîtva modificată în „Despre sens și semnificație", unde Frege admite că suprapunerile de nuanță sau colorit peste sensurile cuvintelor din limbajul natural sau poetic țin de facultatea reprezentării, ele fiind însă comunicabile, adică accesibile mai multor cugete umane.

77 Frege înțelege „mulțimea" (*Menge*) nu în sensul teoriei mulțimilor, ci ca „multitudine", „pluralitate" în accepția naivă a acestor expresii; este firesc, de aceea, că zero și unitatea nu pot fi înțelese ca „mulțimi" în accepția de mai sus.

Angelelli amintește (*op. cit.*, p. 249) că încă Simplicius, comentatorul grec, făcuse observația că zero și unu nu pot fi numere în cazul cînd numerele sînt mulțimi de unități. Contemporan cu Frege, Husserl va relua la rîndul său, în a sa *Filozofie a aritmeticii* din 1891, afirmația după care zero și unu nu sînt propriu-zis numere, ci „răspunsuri negative la întrebarea «cîți?»". Frege explică pe larg, în recenzia opusului husserlian, în ce constă aici eroarea logică. Frege face însă abstracție de o întreagă tradiție filozofică

și logică, înăuntrul căreia mulțimea era privită ca extensiune a unui concept, fiind astfel înțeleasă ca clasă în sens logic; admiterea clasei vide și a claselor cu un singur element nu mai era o noutate în epoca lui Frege, dar nici nu era unanim admisă. Pentru Frege, extensiunea conceptelor înseamnă cu totul altceva decît „mulțimea". Frege privea „mulțimile" ca pe formațiuni gregare, rău definite din punct de vedere logic, lipsite de structură intrinsecă. În consecință, el preferă să vorbească despre concept sau despre extensiuni ale conceptelor; mulțimile sînt pentru el surogate ale extensiunilor de concepte.

78 Carl Johannes Thomae, matematician german, profesor la Universitatea din Jena între 1879 și 1921. Mai tîrziu Frege a combătut în repetate rînduri cu o vehemență neobișnuită concepția formalistă prehilbertiană a lui Thomae, potrivit căreia matematica ar fi un joc după reguli arbitrare cu simboluri neavînd semnificație. Numerele erau privite ca semne perceptibile lipsite de semnificație, încît nu se mai punea problema de a ști „ce sînt numerele și ce trebuie ele să fie", ci numai după care reguli de operație manipulăm simbolurile numerice. Asupra polemicii lui Frege cu Thomae, a se vedea, de exemplu, M. și W. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, pp. 82–85.

79 „*Unitatea* este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu. Iar *număr*, o mulțime compusă de unități" (Euclid, *Elemente*, vol. II, traducere de Victor Marian, București, 1940, p. 5). Vezi și nota traducătorului despre definiția unității și a numărului la greci (*vol. cit.*, p. 220). Se menționează că „la sfîrșitul veacului trecut concepția numărului a fost supusă unei critici riguroase de către mai mulți matematicieni", citîndu-se numele lui Grassmann, Weierstrass, R. Dedekind, Cantor, Peano, Enriques, nu însă și cel al lui Frege.

80 Frege acordă o pondere deosebită în economia cărții sale analizei numărului unu, convins fiind că aici se poate detecta un aspect deosebit de vulnerabil al concepțiilor combătute; tocmai simplitatea desăvîrșită care pare a fi apanajul numărului unu com-

plică enorm lucrurile, creînd iluzia identificării obiectelor cu unităţi.

81 Această observaţie constituie debutul unei analize logico-gramaticale a înţelesului unor cuvinte ca „unu", „unitate", „unitar" ş.a. (§§ 29–33); Frege excelează în asemenea analize, după cum ne vor dovedi şi alte pasaje din *Fundamentele aritmeticii*. În Frege putem descoperi un precursor al filozofiei analitice de astăzi, un practicant al examenului expresiilor limbii în lumina criteriilor logice; însă aici avem numai un element din bogatul arsenal de mijloace, o parte la care nu este îngăduit să reducem întregul. Analiza fregeană a limbajului, în acelaşi timp o critică a limbii şi o elucidare a conţinutului pozitiv din determinaţiile lingvistice, este pusă în slujba unei concepţii filozofice mai cuprinzătoare.

82 Remarca lui Frege este slujită suplimentar de faptul că în unele limbi, printre care germana, determinativul adjectival este pus de obicei înaintea expresiei substantivale „eine Stadt", „weiser Mann". Traducerea noastră nu a fost în măsură să redea această trăsătură.

83 Legea raportului invers dintre sfera şi conţinutul unui concept, aşa cum o cunoaştem din logica tradiţională.

84 Determinările redundante sînt de obicei evitate în folosirea limbajului obişnuit; ca atare, „unu" trebuie să spună ceva nebanal, netautologic. — Pornind de la o premisă analoagă, Frege va ajunge mai tîrziu la concluzii fructuoase privitor la altă determinare, aparent tautologică, şi anume aceea a identităţii. Dacă un lucru este identic numai cu sine şi diferit faţă de oricare altul, ce rost şi ce conţinut mai poate avea o propoziţie de identitate? Răspunsul a fost aflat în distincţia sens–semnificaţie.

85 Argumentaţie tipic fregeană, reluată în decursul întregii opere: gîndirea noastră nu poate crea *ex nihilo*, dar nici nu poate face abstracţie de ceea ce este prezent. „Modul nostru de a vedea lucrurile" poate afecta numai reprezentările noastre, nicidecum însă obiectele sau conceptele.

86 „Existența și unitatea sînt alte două idei sugerate intelectului de fiecare obiect din afară și de orice idee din interior" (Locke, *Eseu...*, Cartea II, cap. VII, § 7; în ed. rom., vol. 1, p. 108).

87 Abstracția nu se dobîndește prin refuz de a gîndi; Frege ironizează în diferite ocazii această echivalare ilicită, deosebit de propice psihologismului. Atunci cînd totul devine reprezentare, va scrie el, „putem să modificăm cu cea mai mare ușurință obiectele, prin îndreptarea sau abaterea atenției. Îndeosebi aceasta din urmă este eficace. Dacă privim mai puțin la o însușire, ea dispare. Lăsînd astfel să dispară o notă după alta, obținem concepte tot mai abstracte. Așadar, conceptele sînt și ele reprezentări, însă mai puțin complete decît obiectele; ele mai au proprietăți ale acelora de care încă nu am făcut abstracție. Lipsa de atenție este o forță logică extrem de eficientă; poate că așa se explică și felul distrat de a fi al savanților" (*Rezension*: Husserl, *Philosophie der Arithmetik*).

88 Prin „unitate" se poate înțelege fie numărul unu, fie însușirea de a fi indivizibil, fie orice obiect, considerat ca unu. Frege își propune să infirme definiția euclidiană a numărului ca mulțime de unități, pentru toate interpretările ce se pot da cuvîntului „unitate". În joc este acum înțelegerea „unității" ca obiect oarecare; se va demonstra că ajungem în egală măsură la dificultăți în cazul cînd unitățile se consideră identice și în cazul opus cînd se consideră distincte. Din infirmarea ambelor ipoteze va rezulta o nouă perspectivă asupra raportului concept–obiect.

89 Criteriul la care se face aici aluzie este, desigur, un concept sub care cad ambele obiecte. Potrivit unui asemenea criteriu — și ne putem reaminti aici etimologia cuvîntului — cele două obiecte sînt *judecate* la fel.

90 Hobbes, *op. cit.*, Dial. I, p. 16.

91 Hume, *Enquiry Concerning Human Understanding*, Sect. XII, partea a III-a, § 131.

92 Procesul prin care dobîndim un concept sub care cad lucruri numărate nu trebuie confundat cu acela prin care dobîndim

însuşi numărul respectiv. Cum ajungem, de altfel, *naturaliter*, la acest număr nu-l interesează pe Frege, ci numai ceea ce *este* numărul. ,— Lucrurile vor fi, aşadar, denumite *unități* nu întrucît sînt numărate, ci întrucît cad sub un acelaşi concept (măcar sub conceptul ad-hoc de „lucru supus, *hic et nunc*, numărării"). Conceptul face din lucruri unități, el propriu-zis este unitatea (a se vedea § 54, alineatul doi).

93 A spune că numărul este o mulţime de unități identice îi pare lui Frege un mod nefericit de a spune că mai multe lucruri distincte cad sub unul şi acelaşi concept. Frege elucidează definiția numărului în lumina raportului dintre unu şi multiplu, identitate şi diferență, concept şi obiect. Critica formulărilor inexacte, în scopul scoaterii la iveală a miezului lor rațional, funcţionează aici în mod exemplar.

94 *Eseu...*, Cartea a II-a, cap. XVI, § 5; ed. rom., vol. I, p. 185.

95 Criteriul logico-gramatical prin care identificăm expresiile care desemnează obiecte. Expresia „numărul unu" este, din punct de vedere logic, nume propriu. Frege apelează în repetate rînduri la acest criteriu. Totuşi, identificăm numele propriu nu numai în lumina acestui criteriu, ci şi prin alte metode, de exemplu prin faptul că acesta nu poate fi utilizat ca predicat, ci numai ca subiect al unei enunțări.

96 Am tradus aici „Begriffswort", expresie care revine frecvent sub pana lui Frege, prin „termen conceptual"; în alte locuri am mai folosit şi denumirea „nume conceptual" etc. Admiterea pluralului este criteriul logico-gramatical care ne permite să constatăm că o expresie lingvistică desemnează nu un obiect, ci un concept.

97 Tocmai de aceea nici „determinarea numerică" (aserţiunea numerică: *Zahlangabe*), judecata prin care stabilim numărul obiectelor subsumate unui concept dat, nu poartă direct asupra colecțiilor de obiecte. În recenzia sa la *Husserl: Philosophie der Arithmetik*, Frege găseşte prilejul de a reveni la concepția eronată

îmbrățișată și de Husserl; observînd că o colecție se lasă descrisă prin intermediul conjuncției „și", Frege constată că „determinările numerice" nu au de obicei forma „A și B și C și... Q sînt *n*", propozițiile de ultima formă fiind extrem de rar utilizate, și numai în scopuri cu totul diferite de acela al stabilirii unui număr. Cu acest prilej, Frege precizează: „În realitate, noi nu întrebăm «cît fac Caesar și Pompei și Londra și Edinburg?» sau «cît fac Marea Britanie și Irlanda», iar în ce mă privește sînt curios să aflu ce răspuns ar da la aceasta autorul. Întrebăm, din contra, «cîți sateliți are Marte?» sau «care este numărul sateliților lui Marte?» și răspunsul «numărul sateliților lui Marte este doi» ne instruiește pe măsura întrebării. Vedem, prin urmare, că atît în întrebare cît și în răspuns apare un nume conceptual sau o expresie conceptuală compusă, iar nu acel «și» pe care îl cere autorul" (în *Kleine Schriften*, 1967, p. 185).

98 Parafrazînd cinica spusă după care limba i-ar fi dată omului spre a-și ascunde gîndurile, cineva ar putea nota, în marginea observației lui Frege, că limba este uneori dată spre a camufla dificultatea de a gîndi.

99 Lui Frege nu-i scapă deci fenomenul fetișizării unor construcții lingvistice; analiza logico-filozofică trebuie să înlăture vălul mistificațiilor care acoperă adevărul ascuns în determinările limbii. Frege vine cu o altă mentalitate decît aceea a pozitivistului care, denunțînd speculația metafizică drept absurditate goală, nu-și mai pune în nici un chip problema recuperării sensului ei rațional.

100 Hobbes, *loc. cit.*, p. 45.

101 Leibniz, *loc. cit.*, p. 31.

102 O concepție diametral opusă asupra rolului timpului în matematică împărtășește intuiționismul brouwerian. Punînd la baza conceptului de număr natural intuiția temporală, intuiționismul filozofic în fundamentele matematicii înțelege să asocieze construcției și devenirii temporalitatea, într-o tentativă de a explica „partea exactă a gîndirii umane", *id est* matematica.

103 De ordin spaţio-temporal sînt *obiectele concret-senzoriale*, adică obiectele care au *realitate*, vrea să spună Frege; or, obiectează el, numărul este aplicabil prin intermediul conceptului la (colecţii de) obiecte oarecare subsumate acestui concept (conceptul însuşi fiind obiectiv, dar neavînd „realitate"). — De la Kant putem prelua însă observaţia importantă că spaţiul şi timpul sînt totodată condiţii constitutive ale oricărei *experienţe posibile.* Tentativele de a funda *epistemic* (nu psihologic!) aritmetica pe experienţa subiectului conţin, de bună seamă, un element raţional; sub rezerva unei interpretări non-subiectiviste a experienţei, înţelegerea numărului natural ca o construcţie în experienţa posibilă a subiectului nu mai poate fi incriminată ca psihologistă. Or, invocarea spaţiului şi timpului ca factori constitutivi ai experienţei posibile pare inevitabilă. Atunci cînd nu acceptă o asemenea abordare, Frege nu este numai antipsihologist în forţă. Prevalîndu-se de faptul că conceptul, obiectiv fiind, nu este totuşi de ordin spaţial sau temporal, Frege ocoleşte posibilitatea unei abordări epistemice, mai largă decît aceea strict logică, a problemei numărului. În ultimii ani ai vieţii sale, cînd Frege va abandona logicismul, el se va adresa „sursei cognitive geometrice" (*die geometrische Erkenntnisquelle*) într-o nouă încercare de a rezolva enigma numărului. — Nu este de prisos să remarcăm, încă o dată, împotriva supraevaluărilor actuale ale elementelor kantiene din *Fundamentele aritmeticii*, că, deşi Frege a evitat o confruntare directă între concepţia logicistă şi concepţia lui Kant despre număr, delimitarea categorică faţă de Kant nu poate scăpa nimănui. Pentru Frege, numărul nu este o construcţie, ci o entitate *dată*. Ceea ce construim noi nu este numărul, ci numai definiţia lui.

104 Se observă că Frege evită a angaja o discuţie în termeni kantieni asupra *intuiţiei* spaţiului şi timpului, intuiţie în care, ca într-un mediu unificator, punctele spaţiului sau ale timpului ar manifesta *a priori* identitatea cerută, diferenţiindu-se numai prin poziţia ocupată. Încă o dată, limbajul fregean porneşte de la constatări realiste, eschivîndu-se de la tot ce ar putea sugera constructibilitatea, à la Kant, a obiectelor matematicii din intuiţii asupra experienţei posibile.

105 Un adversar al punctului de vedere logistic ar putea însă obiecta: „dreptul *logic* de a vorbi despre 45 milioane de germani fără a fi gîndit sau pus în prealabil de 45 milioane de ori un german obişnuit" îl avem, de bună seamă, însă numai întrucît acest număr este corect definit; cu alte cuvinte, numai întrucît este *în principiu* posibil să construim un şir de 45 milioane elemente, de exemplu să construim şirul numerelor naturale 1, 2, ...45 milioane...; în termenii d-voastră chiar, aceasta revine la posibilitatea de a construi definiţia numărului 45 milioane; dar această posibilitate a definirii numărului respectiv nu trebuie onorată efectiv — din fericire, pentru că a formula definiţia efectivă potrivit indicaţiilor pe care le-aţi dat mai încolo, în *Fundamentele aritmeticii*, ar fi oarecum incomod. — În faimoasa lui polemică cu Russell, Poincaré a adus în esenţă această obiecţie împotriva definiţiei logiciste a numărului.

106 Comentariul lipsit de simpatie la adresa demersului lui Schröder ca şi alte pasaje din *Fundamente* îl înfăţişează pe Frege în postura de antiformalist radical. Privind înapoi se poate spune totuşi că în poziţia antiformalistă a lui Frege intră un element caduc. Argumentul lui Frege, după care a explica simbolul numeric nu înseamnă a explica însuşi numărul, întrucît acesta din urmă nu este un semn, rămîne valabil numai dacă excludem *modelele semiotice* din rîndul *demersurilor explicative*. Or, în secolul nostru o asemenea excludere este extrem de discutabilă; încă de mult s-a intuit (Schröder nefiind aici decît unul dintre părtaşii acestei intuiţii) că o bună notaţie a numărului natural (notaţia fiind deja în anumite condiţii un model semiotic) ar putea manifesta structura acestuia — întrebarea dacă structura numărului este tot una cu esenţa acestuia rămînînd deschisă. Programul formalist hilbertian a evidenţiat interesul metamatematic şi în cele din urmă pur matematic al unei asemenea notaţii: însemnătate are aici nu utilizarea efectivă a notaţiei, ci posibilitatea ei principală. Preocupat cum este de instituirea definiţiei logice a numerelor, Frege nu face dreptatea cuvenită demersului semiotic în matematică, ceea ce nu constituie numai o delimitare faţă de punctul de vedere advers, ci şi o îngustare — la urma urmelor o contrazicere — a

propriilor premise: gîndul mare al unei *lingua characterica*, preluat de la Leibniz, nu este împins de Frege pînă la proiectul unei notații lămuritoare pentru număr, notație care ar suplini chiar definiția numărului. Inutil să adăugăm că această observație nu vizează decît *implicațiile* argumentației fregeene, așa cum ele s-au explicitat mult mai tîrziu, în cursul următorului secol. Pentru un geniu ca Frege, faptul de a nu fi întrevăzut această cale a constituit un stimulent puternic în explorările sale pe cealaltă cale.

107 Obiecția lui Frege pleacă, după opinia noastră, de la o neînțelegere: a face abstracție de natura diferențelor nu comandă cuprinderea lor simultană. Cu tot atîta drept s-ar putea replica: în definițiile de mai jos ale numerelor naturale ca obiecte logice sau în analiza asertiunilor numerice este de asemenea presupusă existența unor diferențe, căci în definiții sau explicitări apar clauze (subformule) de tipul $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ ş.a.m.d. Atunci cînd utilizăm numerele, aceste „forme ale diferenței" sînt gîndite implicit, căci o definiție — potrivit doctrinei fregeene — nu face decît să expliciteze ceea ce era dinainte dat; dificultatea cuprinderii simultane a mai multor diferențe poate fi regăsită acolo unde ne-am aștepta mai puțin.

108 Prin afirmația de aici, Frege precizează că propriul său demers este pur logic, nu epistemologic.

109 Frege ia *à la lettre* caracterizarea lui Jevons a numărului ca „forma vidă a diferenței", procedînd cu acrimonie matematică și fără cea mai mică indulgență filozofică. Desigur că „$a \neq b$" își trădează inadvertența dacă o luăm ca presupusă definiție a numărului doi. Însă atunci cînd afirmăm: „Pămîntul are doi poli", noi mai afirmăm potrivit lui Frege: există un obiect a care este pol al Pămîntului, există un obiect b care este pol al Pămîntului și a este distinct de b. — Critica fregeană vizează însă în mod îndreptățit imprecizia sugestiei lui Jevons că numărul ar *abstrage* diferențele dintre obiectele unei colecții într-o formă pură a diferenței ca atare.

110 Într-adevăr, întrucît nu lucrurile sînt suportul numărului, acest suport trebuie căutat în altă parte; el va fi găsit în concept.

111 „Caracterul vag" al expresiilor menționate se datorează faptului de a nu fi determinate prin concept.

112 În ipoteza că numărul este o mulțime de unități.

113 Din nou este pus în joc principiul contextualității semnificației. Totodată este presupusă aici echivalența celor două întrebări: „ce este numărul?" și „ce semnificație are un numeral?" Aplicarea originară a numărului constă, desigur, în numărarea unei colecții de obiecte. Frege nu se adresează însă direct actului numărării, ci numai indirect, prin intermediul acestei forme de judecată pe care o numește *Zahlangabe*, adică aserțiune sau determinare numerică („Zahlangabe" se mai poate traduce prin „indicație numerică").

114 Argument tipic fregean, izvorît din marile tradiții ale filozofiei germane; acolo unde logicianul nominalist ar fi fost pregătit să resoarbă conceptele în termeni, profesorul de matematici de la Jena înțelege termenii ca vehicule ale conceptelor, ceea ce îi permite să stabilească rezultatul important de mai jos.

115 Acesta este primul rezultat fundamental de natură afirmativă pe care Frege îl stabilește cu privire la număr. După cascada infirmărilor de pînă acum, critica logico-filozofică va trece în construcție solidă. Dar caracterul polemic al argumentației lui Frege nu rămîne, în continuare, mai puțin manifest — dacă nu altfel, atunci cel puțin prin minuțiozitatea cu care sînt preîntîmpinate eventuale obiecții. În ceea ce privește formularea: *Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe*, să amintim că termenul *Aussage*, pe care l-am tradus aici prin *enunț*, semnifică în genere *ce se spune despre* un posibil subiect al rostirii, dar astfel ajunge să însemne în germană pînă și *predicat*. Ar fi însă impropriu de a înțelege *Zahlangabe* ca o judecată de forma subiect–predicat, în care numărul este enunțat ca predicat al unui concept. Vom vedea mai jos deslușirile pe care le dă Frege. Într-o parafrază liberă, *dictum*-ul fregean s-ar limpezi astfel: atunci cînd dăm un număr, spunem ceva despre un concept. Acceptînd acest principiu, racordul dintre aritmetică și logică, via număr-concept, apare mult mai

firesc decît introducînd *ex abrupto* doctrina logicistă. E de mirare cum logica filozofică nu a poposit mai stăruitor în preajma acestui principiu fregean, atît de prielnic speculației filozofice, ci, urmînd mersul ideilor în curgere matematică, a acceptat cu umilință faptul că matematica se reazemă pe o *teorie a mulțimilor*, nicidecum pe una a conceptelor. S-a întîmplat deci că repunerea în drepturi a conceptului a fost de scurtă durată; în mod fatal, este preferabil să vorbim direct despre clase sau colecții, încît determinarea numerică este înțeleasă ca enunțînd ceva despre o mulțime. Pe de altă parte, dificultățile fundaționale au împins tot către un mod de exprimare nominalist, astfel că vorbim despre termeni conceptuali și nu despre concepte.

116 Asupra expresiilor care sînt funcție de timp, Frege revine în „Ce este o funcție?". Problema logică legată de asemenea expresii este elucidată astăzi în semantica lumilor posibile. Exemplul propus de Frege îl putem trata, rămînînd în limitele semanticii fregeene, în două maniere deosebite. Sau spunem că „locuitor al Germaniei" nu are semnificație decît dacă precizăm timpul, iar atunci expresia *indică în mod nedefinit* un concept; sau tratăm „locuitor al Germaniei" ca expresie ce desemnează o relație, adică funcție avînd două argumente și luînd ca valoare adevăratul sau falsul, funcție din care, prin fixarea argumentului potrivit (în exemplul de față „prima secundă a anului 1883, ora Berlinului"), obținem o expresie pentru un concept propriu-zis, adică pentru o funcție de un argument, care ia valori de adevăr ca valori pentru diversele sale argumente (asupra distincției precise între concepte și relații, vezi în scrierea de față § 70, precum și „Funcție și concept").

117 Relația de subordonare a conceptelor respective se exprimă în ceea ce logica tradițională numește propoziții universal-afirmative: „Orice corp este greu", „Toate balenele sînt mamifere". Relația de subordonare a conceptelor trebuie deosebită de relația logică a căderii obiectului sub concept. În logica predicatelor, ea își găsește expresia în ceea ce Russell numește implicație formală; formula $(x)\ (A(x) \rightarrow B(x))$ este o atare implicație.

118 Ceva obiectiv înseamnă aici, desigur, ceva preexistent şi astfel independent de reprezentările şi operaţiile logice ale subiectului. „... După părerea mea — scrie Frege în altă parte — aducerea unui obiect sub un concept constituie numai recunoaşterea unei relaţii care subzista anterior" (*Rezension: Husserl, Philosophie der Arithmetik*; vezi *Kleine Schriften*, pp. 181–182). Deşi aici este vorba de o relaţie logică diferită, nu încape îndoială că aceeaşi caracterizare rămîne valabilă.

119 Cu alte cuvinte, propoziţia pare să trateze despre lucruri individuale, nu despre proprietăţi generale ale lucrurilor individuale.

120 Afirmaţia pare banală, însă Frege — cum se lămureşte imediat mai jos — o interpretează în sensul că nu putem vorbi despre obiecte fără a folosi nume proprii. În felul acesta, el se delimitează de întreaga semantică tradiţională.

121 Dezvoltîndu-şi punctul de vedere în contextul polemicii cu Husserl, Frege aduce următoarea precizare: „Dacă l-am desemna pe Hans prin «om» şi la fel pe Kunz, atunci am comite într-adevăr eroarea desemnării unor lucruri distincte prin una şi aceeaşi denumire. Din fericire, noi nu procedăm astfel. Atunci cînd îl numim om pe Hans spunem prin aceasta că Hans cade sub conceptul *Om*, însă nu scriem şi nu spunem «om» în locul lui «Hans»... Atunci cînd pe A îl numim B în sensul că îi conferim lui A numele propriu «B» putem, fireşte, să spunem întotdeauna «B» în loc de «A»; dar atunci nu mai putem da unui alt obiect acelaşi nume «B». De această confuzie se face vinovată expresia nefericită de «nume comun». Acest aşa-zis nume comun — care ar trebui denumit mai curînd termen conceptual (*Begriffswort*) — nu priveşte în mod direct obiectele, ci semnifică un concept; sub acest concept cad, eventual, obiecte; dar el poate fi şi vid, fără ca din acest motiv termenul conceptual să aibă mai puţin o semnificaţie. În § 47 din *Fundamentele aritmeticii* am prezentat încă de mult această concepţie. Este într-adevăr clar că propoziţia «Toţi oamenii sînt muritori» nu este folosită de cineva cu referire la un

anumit şef de trib Akpanya despre care poate că nici nu a auzit" (*Rezension: Husserl*, ..., în *op. cit.*, p. 188).

122 Din nou, o delimitare față de gnoseologia kantiană, în care apercepția este izvor subiectiv al cunoașterii și principiu unificator al materialului divers al reprezentărilor. Caracterizată de Kant ca „identitatea universală de sine în toate reprezentările posibile", apercepția sintetică face din conștiința de sine garantul unității introduse în diversitatea elementelor cunoașterii. „Posibilitatea formei logice a oricărei cunoașteri — tot pentru Kant — se întemeiază necesar pe raportul cu această apercepție *ca o facultate*" (*Critica rațiunii pure*, ed. rom., 1969, pp. 158, 161). Lui Frege, un asemenea punct de vedere îi apare inacceptabil. Prin faptul că un concept este obiectiv — ceea ce înseamnă că îl descoperim, nu-l și creăm — el are de la bun început priză asupra obiectelor: *el* le „judecă", reținînd în sita sa extensiunea, obiectele cărora le revine, așadar cărora le aparține ca proprietate. Atunci cînd numărăm se presupune că am deosebit obiectele unei colecții ca aparținînd tocmai acesteia și deci ca satisfăcînd un anumit criteriu, care nu este neapărat acela al agregării într-un spațiu limitat, de exemplu în orizontul vizual al unui ins; criteriul nu este altul decît conceptul. Puterea conceptului de strîngere laolaltă se întemeiază pe relația logică a căderii obiectelor sub concept.

123 Spinoza este unul din puținii filozofi la care Frege a putut găsi o anticipare a propriei sale concepții despre număr. Într-un manuscris rămas de la Frege și editat recent, găsim următoarea însemnare sarcastică: „Obstacolele cu care trebuie să lupte progresul general arată că autori ai timpului nostru — printre care pînă și istorici ai filozofiei, de exemplu K. Fischer (cf. *Fundamentele* mele, Introd.) — procedează ca și cum pe tărîmul acestor probleme omenirea ar fi dormit pînă astăzi și abia acum își freacă ochii înnegurați, cînd, de fapt, gînditori de valoare unanim recunoscută, cum este Spinoza, au exprimat încă de mult idei pregnante despre număr. Dar pe cine să-l intereseze ce spune Spinoza despre un lucru ca acesta, care e la mintea copiilor?" („Über den Begriff der Zahl. 1. Auseinandersetzung mit Biermann", în *Nachgelassene Schriften*, p. 93).

124 Spinoza, Scrisoarea către *Ludwig Meyer* din 20 aprilie 1663 și Scrisoarea către *Jarigh Jelles* din 2 iunie 1674.

125 Conceptele se obțin mai întîi prin abstracție, proces semiotic caracterizat în altă parte de către Frege ca desprinderea din mai multe lucruri, distincte dar asemănătoare, a ceea ce au ele comun și ca desemnare a acestui element comun printr-un semn; dar mai putem forma concepte noi pe baza conceptelor aflate în prealabil la dispoziția noastră. Pentru aceasta pornim de la *notele* unor concepte date (asupra notelor și a distincției notă–proprietate, vezi § 53), combinîndu-le, de exemplu, prin intermediul unor particule logice ca „și", „sau", „nu" ori prin alte procedee mai complicate. Importanța contribuției lui Frege la teoria conceptului este legată de faptul că marele logician german a întrevăzut posibilitatea ajungerii la concepte noi, „pornind de la note", prin procedee diferite de simpla generalizare sau determinare descrise în logica tradițională. Frege era în măsură să efectueze acest adevărat salt constînd în a pune problema formării de noi concepte în toată generalitatea, întrucît conceptul a fost înțeles de el (i) ca ceea ce se spune despre obiect, predicat posibil (ii) ca desemnat de o expresie (oricît de lungă și complicată) prin intermediul căreia enunțăm ceva despre obiect și (iii) ca *alcătuit* într-un fel de *notele* sale, așa cum un lucru este din părți, și nu așa cum un lucru este „alcătuit" din însușirile sale. Frege își dă seama că nu avem decît a combina corect din punct de vedere logic diferite expresii care desemnează concepte, spre a obține deja o expresie care va desemna și va defini un nou concept, în cazul cînd în genere expresia se va putea enunța cu sens despre un obiect. În mod analog se pot defini și *relații*, se pot combina expresii pentru concepte și relații în noi expresii care vor desemna concepte sau relații. Expresiile de la care se pornește desemnează *notele* noului concept, introdus printr-o expresie care îl definește nu neapărat prin „genul proxim și diferența specifică". În partea a IV-a a *Fundamentelor aritmeticii* vom întîlni numeroase exemple în acest sens. Astfel, în § 79 se introduce „element al șirului de numere naturale terminat cu *n*" ca expresie desemnînd — pentru un *n* fixat — un anumit concept definit prin intermediul relației

de succesiune (sau al relației converse, de precedență); conceptul de număr finit este desemnat prin expresia „... este un număr finit" și definit (§ 83) prin intermediul conceptului desemnat de expresia „este un membru al șirului de numere naturale ce începe cu 0".

126 Conceptul de „cerc pătrat" constituie un exemplu; în matematică, demonstrațiile de existență revin la indicarea faptului că un obiect cade sub un anumit concept, un cuplu de obiecte satisface o relație dată ș.a.m.d.

127 Aici este implicat faptul că o propoziție are sens dacă și numai dacă negația ei are de asemenea sens.

128 Frege revine la observația făcută în § 47; a se vedea și notele 120, 121.

129 Distincția logico-gramaticală între nume propriu și nume sau termen conceptual derivă din distincția fundamentală concept–obiect, enunțată în introducere cu titlul de principiu fundamental.

130 Frege admite deci în logica sa conceptele individuale; acestea au fost admise, de asemenea, în logica tradițională. Un concept individual este un *nomen appelativum* ca oricare alt concept. Distincției dintre conceptul individual și individul subsumat acestuia îi corespunde distincția dintre clasa cu un singur element și însuși elementul.

131 I. Angelelli găsește că aici avem „cea mai bună formulă utilizată în *Fundamentele aritmeticii* pentru a caracteriza concepte și obiecte (nume de concepte și nume de obiecte)"; este „criteriul «cel bun»" de distincție între concepte și obiecte, avînd ca presupunere subzistența unor entități care pot fi numai referenții relației logice fundamentale de cădere sub concept, entități ce sînt subiectele ultime ale predicației (I. Angelelli, *op. cit.*, p. 157).

132 În germană, cuvîntul „Mond" desemnează nu numai satelitul natural al planetei noastre — semnificat de asemenea prin

„Erdmond“ —, ci și conceptul de „satelit“. Dezambiguizarea expresiei se produce în contextul de utilizare. În limba română, — spre a da un exemplu oarecum înrudit — „soare“ este întrebuințat ca nume propriu, însă admite și pluralul „sori“, acesta din urmă funcționînd în calitate de termen conceptual, sinonim cu „stea“.

133 Trăsătură pe care nu o mai întîlnim în limba română.

134 Încheierea secțiunii 52 deschide către unul din cele mai dense fragmente ale *Fundamentelor*, în care geniul logicianului își găsește o expresie desăvîrșită. Problema în discuție va fi conceptul ca *subiect* al enunțării.

135 Distincția notă–proprietate este introdusă de Frege în scopul depășirii unei dificultăți de care se ciocneau o seamă de teorii anterioare asupra numărului. Acestea priveau numărul ca notă a unui concept; de fapt însă, numărul revine conceptului ca (obiect derivat dintr-o) proprietate a acestuia. Teoria tradițională a predicației privea nota ca proprietate a conceptului, omițînd distincția. Or, deosebirea formală dintre relația de subordonare între concepte și relația de cădere a unui obiect sub un concept impunea și noua distincție. Dacă A este subordonat lui B — și deci $(x)\ (A(x) \rightarrow B(x))$ are loc —, atunci B este o notă a lui A, relația fiind între concepte de același ordin; dacă a cade sub A, relația este între obiect și un concept și putem scrie în simbolismul logicii predicatelor: $A(a)$; dacă B este o notă a lui A, și dacă $A(a)$, atunci $B(a)$; avem aici principiul pe care logica tradițională îl exprima prin *nota notae est nota rei ipsius* — formularea vădind tocmai confuzia între notă și proprietate. Ce se întîmplă însă dacă enunțăm o proprietate despre un concept *ca atare*? Atunci, arată Frege, enunțăm o relație *analogă* celei de cădere a unui obiect sub un concept (a se vedea și „Funcție și concept“; „Despre concept și obiect“); așadar, în timp ce *nota* exprimă o relație între concepte de același ordin, *proprietatea* este legată de o relație între entități de pe planuri diferite: fie relația obiect–concept, fie relația concept de ordin unu–concept de ordin superior. Distincția

fregeană este astfel asociată unei ierarhizări a entităților și a expresiilor — o prototeorie a tipurilor, s-ar spune. Cînd vorbim despre proprietatea unui concept, nu vorbim și despre proprietatea obiectelor care cad sub acel concept. Dar *cum* se enunță o proprietate despre un concept? Și poate fi conceptul însuși subiect al predicației? Luat ca subiect al predicației, conceptul nu se va transforma în obiect, estompîndu-se astfel o distincție fundamentală? Frege a reluat analiza acestor probleme în articolele citate mai sus.

136 Notînd conceptul menționat prin P( ), propoziției îi corespunde formula (x) P(x); propoziția nu are forma subiect-predicat. Negarea existenței, ca de altfel și existența, nu capătă expresie în propoziții singulare sau universale (în sensul logicii tradiționale). Conceptul existenței și cel al non-existenței se exprimă prin cuantor și negație; ele realizează o „predicație implicită", nu directă (cf. I. Angelelli, *op. cit.*, p. 181, unde se vorbește despre predicația implicită de ordin superior).

137 A se vedea secțiunea 75. Nu trebuie uitat că, deși numărul exprimă o proprietate a conceptului, el nu este enunțat ca un concept, ci atribuit (aplicat: *beigelegt*) conceptului de ordin inferior.

138 Frege pune astfel în conexiune ontologia cu numărul, clarificînd prin analiză logică unele speculații metafizice ale tradiției filozofice.

139 Iată una din aplicațiile de mare renume ale analizei logice într-un domeniu în care s-au exersat minți din cele mai subtile, de la Anselm din Canterbury, autorul faimosului argument ontologic, pînă la acel Anselm redivivus care este Descartes, împotriva căruia se ridică energic Kant. O comparație între Frege și Kant (a se vedea capitolul „Despre imposibilitatea unei dovezi ontologice a existenței lui Dumnezeu" din *Critica rațiunii pure*) ar evidenția convergența concluziilor și a unei părți a argumentației. Frege a concentrat ca într-o rază laser esența argumentației lui Kant împotriva pretinsei dovezi carteziene: existența nu este un concept al lucrurilor. Definit ca ființă atotperfectă, în a cărei

csenţă este inclusă şi existenţa, Dumnezeu este un simplu concept. Nu rezultă însă din definiţie proprietatea existenţei unei fiinţe supreme, aşa cum din definiţiile matematice rezultă de atîtea ori numeroase proprietăţi? Nicidecum, întrucît — arată Frege — conceptele se *compun* din notele lor, aşa cum o casă se compune din materialele din care este construită, iar definiţia construieşte un concept din notele, nu din proprietăţile lui, aşa cum noi am zidi o casă din materialele componente şi nu din proprietăţile casei. Existenţa fiind o proprietate a conceptului, nu poate decurge *imediat* din definiţia conceptului; la fel şi unicitatea. Cu aceasta, problema dovezii ontologice este clarificată. Un corolar al concepţiei lui Frege este că existenţa nu poate fi atribuită obiectelor; este, de exemplu, deopotrivă lipsit de sens să spunem că Iulius Caesar există sau că nu există. Pornind de aici, neopozitivismul a proclamat moartea ontologiei, decretînd problema existenţei ca lipsită de sens şi ca tributară unei tradiţii perimate. Însă extrapolarea este abuzivă. Rămînînd la aspectele pur logice ale chestiunii (fiindcă raportarea omului la fiinţa lumii prin limbaj nu se rezumă la elaborarea categorială a „existenţei" ca predicat), se poate observa, de pildă, că „X există" poate căpăta un sens, dacă o parafrazăm fie prin „numele propriu «X» are o semnificaţie în domeniul obiectelor reale", fie prin „$\exists y(y = X)$", fie în alte moduri, în funcţie de contextul folosirii. Dacă limba păcătuieşte nu o dată împotriva gramaticii logice, se întîmplă şi ca gramatica logică să preschimbe limitările ei momentane în interdicţii impuse discursului filozofic.

140 De exemplu, conceptul de a fi „identic cu zero", prin însăşi definiţia sa, implică admiterea unui obiect subsumat — acesta este însuşi zero — şi numai unul: existenţa şi unicitatea sînt aşadar proprietăţi ale conceptului amintit (a se vedea § 77). Dar unicitatea şi existenţa nu sînt *note* ale aceluiaşi concept şi nu intră în definiţia lui; în caz contrar, am fi fost obligaţi la aserţiuni ca „orice obiect identic cu zero există", „orice obiect identic cu zero este unul şi numai unul", aserţiuni al căror nonsens a fost în prealabil arătat.

141 Acest concept este desemnat printr-o expresie predicativă de genul „este concept singular". Conceptul „Satelit al pămîntului" este într-adevăr un concept singular (sub el cade un singur obiect), spre deosebire de însuși satelitul Pămîntului.

142 Frege introduce aici o distincție importantă pe care în „Funcție și concept" o va generaliza pentru cazul funcțiilor în genere (inclusiv relații); totodată, în loc de *ordin* (*Ordnung*) al funcției el va folosi mai tîrziu expresia *treaptă* (*Stufe*). Unii exegeți văd aici o adevărată teorie a tipurilor *in nuce*, alții se arată mai rezervați fiindcă, pe de o parte, Frege nu sugerează nicăieri că ierarhizarea poate continua indefinit, pentru ordine (trepte) oricît de înalte, iar pe de altă parte, obiectele nu sînt la rîndul lor ierarhizate. Observăm, de asemenea, că ierarhizarea entităților nu este însoțită în prezentarea de față de o ierarhizare a expresiilor care le desemnează.

143 Primele trei părți ale *Fundamentelor* sînt tot atîtea etape preparatorii care conduc către definirea pur logică a numărului cardinal (*Anzahl*).

143a Frege nu introduce simboluri pentru a formaliza aserțiunile sale. Dar logica predicatelor ne stă la dispoziție în acest sens; Frege ar fi putut extinde cu ușurință notațiile din *Begriffsschrift* în vederea unei expuneri strict formale, însă reacția alergică a publicului de filozofi și chiar de logisticieni la sistemul său de notații l-a îndemnat să recurgă la enunțuri formalizabile, însă nu actual formalizate. Astăzi, revirimentul produs în reacția publicului față de logica simbolică convoacă în mod conformist în direcția opusă: a da gîndului expresie simbolică, ori de cîte ori claritatea intrinsecă a ideografiei nu obligă la lungirea disproporționată a frazei simbolice în comparație cu aceea din limbajul cuvintelor. Încercînd să formalizăm definițiile fregeene, avem la dispoziție două procedee. Putem trata numărul drept predicat de predicate, adică drept concept de ordin doi; aserțiunea numerică de forma „numărul *n* revine conceptului F" s-ar exprima atunci printr-o formulă a logicii predicatelor de ordin doi, în genul $n(F)$,

subînțelegîndu-se că n este o variabilă avînd ca valori predicate care pot lua ca argumente predicate de o variabilă individuală. În particular, pentru n putem substitui 1, 2, 3, ... Dar Frege precizează că numărul este obiect, nu concept, iar aserțiunea numerică are caracterul formal al identității (§ 57); în consecință, într-o tratare mai apropiată de aceea fregeană, vom nota prin N[F] *numărul care revine conceptului F*, unde *N*, un functor de un singur argument, este aplicat la concepte spre a produce numerele care revin respectivelor concepte. Potrivit acestor stipulări, vom formaliza în cele două variante enunțul din alineatul 2 al § 55 (fără a apela la simbolismul fregean), după cum urmează: $0(F) \leftrightarrow (a) \sim F(a)$, respectiv $N[F] = 0 \leftrightarrow (a) \sim F(a)$. Am notat prin F un concept despre care se admite că i-ar reveni numărul zero și am presupus că prin „atunci" din formularea lui Frege este subînțeles „atunci și numai atunci", pentru care am folosit semnul echivalenței $\leftrightarrow$.

144 Formulele corespunzătoare sînt:

$$1(F) \leftrightarrow \sim (a) \sim F(a) \,\&\, (F(a) \,\&\, F(b) \rightarrow a = b)$$

respectiv

$$N[F] = 1 \leftrightarrow (\sim (a) \sim F(a) \,\&\, (F(a) \,\&\, F(b) \rightarrow a = b))$$

În continuare vom folosi numai ultima manieră de notație, transcriind de exemplu „numărul care revine lui F este n" prin formula: $N[F] = n$. De asemenea, vom economisi parantezele, scriind de cele mai multe ori, de exemplu, Fa în locul lui F(a).

145 $N[F] = (n + 1) \leftrightarrow (\exists a) (Fa \,\&\, N[F(b) \,\&\, b \neq a] = n)$.

146 Cu alte cuvinte, explicațiile de pînă acum ne ajută să *traducem* o aserțiune numerică într-o frază al cărei sens este deplin lămurit, însă înțelesul unei sintagme izolate din fraza tradusă, și anume „numărul care revine conceptului F" și la fel înțelesul subsintagmei „număr" ne rămîn necunoscute ca înainte. Știm că numărul unui concept este un obiect, dar nu sîntem încă în posesia unui criteriu de identificare pentru obiectele specifice care sînt numerele. Acel criteriu ni-l va da abia *definiția* expresiei „numărul

care revine conceptului F". Deocamdată, a fost definită numai expresia „numărul care revine conceptului F este *n*". Definiția îmbracă o formă inductiv-matematică, altfel spus recursivă: au fost definite mai întîi frazele N[F] = 0, N[F] = 1 și ni s-a indicat un procedeu general prin care înaintăm de la definiția unei identități de forma N[F] = *n* la aceea de forma N[F] = *n* + 1. Se observă cu ușurință că trecerea de la definiția unei determinări numerice la definiția numărului însuși este analoagă unui proces al gîndirii spontane. Înțelesul unei aserțiuni numerice este considerabil mai accesibil decît înțelesul unei expresii numerice; învățăm să numărăm jucîndu-ne, dar putem muri savanți fără să ne fi întrebat măcar ce sînt și ce va să zică — *was sind und was sollen* — numerele. Ne este de ajuns să putem opera după reguli de calcul și să putem aplica numerele ca să avem sentimentul familiarității cu numerele. Adevărul propozițiilor matematice o dată certificat, iluzia că sîntem în posesia deplină a *sensului* lor și că deci știm cumva ce este și numărul ne poate învălui de-a lungul întregii vieți ca acel văl al iluziei, Maya, despre care vorbește tradiția indiană. Din acest somn ne trezește demersul fundamentalist. Dar la punctul unde am ajuns acum grație lui Frege se trezește un prilej de adîncă mirare: cum este cu putință ca înțelesul unei fraze să fie clar înainte ca înțelesul tuturor părților componente să fi fost în prealabil elucidat? Or, traducerea (sau explicația) unei determinări numerice de forma N[F] în limbaj logic pare să nu lase dubii în această privință, după cum ne conduce aici și sentimentul nostru că întrebarea operațională: ce număr revine conceptului F? (formulată eventual într-o modalitate laică, de pildă: „cîte mere sînt în grămada de față?") este considerabil mai simplă decît întrebarea: „ce înseamnă însuși acel număr, oricare ar fi el, despre care spui că este numărul merelor din grămada de față?". O asemenea uimire se naște însă în preajma lingvisticii și logicii tradiționale cu mentalitatea lor atomistă, potrivit căreia înțelegerea întregului este condiționată în sens unic de înțelegerea părților alcătuitoare. Sîntem conduși acum la o semantică holistă, pe care Frege ne obligă s-o gîndim prin intermediul principiului contextualității. Intuind mai profund *fenomenul* lingvistic (și logic): judecata trece

înaintea conceptului, propoziția înaintea cuvîntului izolat. Dar intuițiile noastre o dată modificate într-un punct vor determina schimbări și în alte puncte ale cîmpului. În mod deosebit va trebui să admitem (întru cîtva *adversus* Frege!) că există *trepte* de înțelegere implicită (dacă se poate spune așa); avem un ghem de posibilități explicative care se poate desfășura într-o tramă explicitatoare a sensului expresiilor incumbate. Sau nu cumva lucrurile stau exact invers? Nu cumva expresiile numerice nu au un sens decît în contextul judecății? Dar faptul că numerele vor fi în cele din urmă definite nu lasă nici o îndoială că principiul contextualității nu are — așa cum am mai spus — acest sens excesiv, mai curînd russellian decît fregean.

147 Subiectul real al enunțării nu este întotdeauna desemnat de subiectul gramatical al propoziției (în cazul de față „numărul 0"); și tocmai de aceea distincția subiect–predicat își pierde în ochii lui Frege rolul fundamental de care s-a bucurat în logica tradițională.

148 Enunțarea, ceea ce se spune despre subiectul real al propoziției, exprimă o proprietate a acestuia; Frege pare să presupună că proprietățile nu sînt și nu se prezintă ca entități independente, spre deosebire de obiecte. Tema este adîncită de Frege în „Despre concept și obiect", prin introducerea distincției între expresii și entități saturate, respectiv nesaturate.

149 Frege a susținut că în diverse contexte „este" exprimă relații deosebite; cuvîntul poate să trimită fie la relația de cădere a unui obiect sub un concept, fie la relația de subordonare a unui concept față de altul, fie la aceea de identitate, respectiv poate să figureze în cadrul unei propoziții singulare, a uneia universal-afirmative sau a uneia de identitate. În consecință, un simbolism logic corect trebuie să introducă notații distincte pentru cele trei relații semnificate de omonimicul „este". În cazul de față, avem o propoziție de forma pe care am convenit s-o notăm (cf. nota 144) printr-o formulă de genul $N[F] = n$; F va fi deci „satelit al lui Jupiter" iar n va lua valoarea 4. Textul de referin-

ță în problema lui „este“ în logica simbolică rămîne, desigur, *Tractatus logico-philosophicus*, 3.323: „În limba de toate zilele se întîmplă adesea ca unul și același cuvînt să desemneze în moduri cu totul diferite — și să aparțină, așadar, unor simboluri diferite — sau ca două cuvinte care desemnează în moduri diferite să fie la prima vedere folosite în același mod în cadrul propoziției. Cuvîntul «este» apare astfel ca semn al egalității și ca expresie a existenței; «a exista» — ca verb intranzitiv, asemenea verbului «a merge»; «identic» — ca adjectiv...“ Observația este însă mai veche și, în orice caz, Frege se dovedește mai puțin econom în materie de explicații decît sibilinicul Wittgenstein.

150 Observația trimite imediat la distincția sens–semnificație de mai tîrziu; Frege o elaborează pornind tocmai de la forma identității în care prin desemnarea diferită a unuia și aceluiași obiect (aici: „Columb“ și „descoperitorul Americii“) obținem o informație sintetică. A se vedea „Despre sens și semnificație“.

151 Am înlocuit *Aur*, corespondentul germanului „Gold“ din textul tradus, prin *Fier*, cuvînt care, avînd patru litere, poate reda în limba română exemplul ales de Frege.

152 Am tradus *das Gewollte* prin „intenția“, prilej de a întrezări că §§ 58–60, unde Frege revine — nu pentru ultima oară — la deosebirea dintre reprezentare și gîndire, conțin o schiță de analiză *fenomenologică* (sau cumva antifenomenologică). Interesul lui Husserl pentru Frege devine explicabil, logicianul de la Jena practicînd ocazional ceea ce anglo-saxonii numesc *Philosophy of mind*, fie și numai spre a anexa gîndirii partea defrișabilă a luxuriantei activități psihice.

153 A se reciti în Cuprins titlul secțiunii 60. Explicațiile lui Frege dezvoltă afirmația din *Introducere* după care principiul contextualității este comandat de critica aberației psihologiste. Este lesne de înțeles cum exegeții și-au putut forma pe baza acestui pasaj părerea că între cel ce a scris *Fundamentele aritmeticii* și autorul lui „Über Sinn und Bedeutung“ se cască o falie, semantica fregeană atestînd că și pentru expresiile izolate de contextul

propozițional am putea găsi o semnificație. Chestiunea a mai fost discutată în nota 17. Aici să mai adăugăm trei observații. Mai întîi, principiul contextualității semnificației este cu deosebire apt de a sluji în matematică, sau în genere oriunde întîlnim judecăți cu termeni nu observaționali, ci teoretici, termeni adică „pentru care nu găsim o imagine interioară corespunzătoare". Semnificația unui termen este atunci dependentă nu numai de contextul judecăților, ci într-un grad și mai înalt dependentă de întregul sistem al conceptelor și judecăților din teoria de referință; iar în afara judecății unele părți componente ale ei nu desemnează în mod independent nimic, funcția lor fiind aceea de auxiliari indispensabili. Exemplul dat de Frege în subsolul alineatului următor, ca și considerațiile sale dintr-un articol de mai tîrziu (1891, deci în preajma lui „Sinn und Bedeutung"!), „Despre legea inerției" — acolo Frege spune, în spirit holist, că numai totalitatea postulatelor mecanicii se raportează la experiență — atestă că o asemenea interpretare nu modernizează excesiv gîndul lui Frege. Dar există și un al doilea aspect: cuvîntul *semnificație* (*Bedeutung*) mai păstrează în *Fundamentele aritmeticii* un uz fluctuant; Frege se luptă împotriva identității *Bedeutung = Vorstellung*, iar ca argument în lupta sa împotriva psihologismului face observația *fenomenologică* după care *dacă* înțelegem să asociem judecăților reprezentări, și la fel cuvintelor, *atunci* reprezentarea asociată judecății nu este compusă din reprezentările asociate cuvintelor componente, pentru simplul motiv că nici măcar nu putem asocia fiecărui cuvînt al frazei o reprezentare izolată. Transpare așadar din explicațiile lui Frege asupra principiului său și o teorie holistă asupra amalgamării reprezentărilor izolate în cele globale. Însuși principiul contextualității spune însă și vrea altceva: să asigure obiectivitatea semnificațiilor, conținuturilor, smulgîndu-le din sfera reprezentărilor mentale. În al treilea rînd, s-ar putea ca Frege să fi fost condus la principiul contextualității semnificației și de următoarea observație, pe care *expressis verbis* nu o întîlnim nicăieri în opera sa: putem defini astfel înțelesul unei *Zahlangabe*, încît propoziția obținută să mai conțină cuvîntul pentru concept, dar cuvîntul care desemna numărul să pară a se fi

volatilizat fără vreo urmă palpabilă. Traducerea conține așadar un termen conceptual, dar în rest numai variabile și constante logice. Într-adevăr, am văzut (§ 57) că, de exemplu, aserțiunea N[F] = 2 se definește logic $(\exists x)(\exists y)(Fx \& Fy \& x \neq y \& (z)(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$. Principiul contextualității comportă așadar următorul corolar: traducerea dintr-un limbaj în altul se petrece nu cuvînt cu cuvînt, ci frază cu frază. Un corolar înrudit este: definirea semnificației unei propoziții nu comandă definirea cuvintelor care compun propoziția. Aceste consecințe au fost exploatate de Russell și alți filozofi analiști în direcții cu totul nefregeene.

154 Afirmația poate fi înțeleasă în două feluri: sau că numeralul desemnează numai înăuntrul contextului propozițional, sau că ceea ce desemnează numeralul nu se află în afara contextului propozițional. Prima interpretare este mai plauzibilă. Dar primul alineat al § 61 va preciza totodată: numerele nu sînt nici înăuntru, nici în afară în sens spațial, nu acceptă determinația locului.

155 *Objective Gegenstand*: obiect care ne stă în față, obiect prezent.

156 Obiectivitatea, de-a lungul întregului pasaj, este asociată însușirii de a fi același pentru toți: obiectivitatea în sens slab. Să însemne aceasta că Frege stă sub pecetea lui Kant, cum vor recent unii exegeți? Se uită faptul că Frege a recunoscut în termeni fără echivoc existența obiectelor reale, independente de conștiința umană, independente de reprezentare. Obiectivitatea numărului cea lipsită de realitate nu se rezumă însă nici ea la firea numărului ca unul pentru toți; contextul global pare dimpotrivă să ateste că a fi unul și același este numai un criteriu al obiectivității înțelese ca independență față de conștiința umană. În genere, existența nu poate fi separată, în matematică cel puțin, de adevăr. Adevărul obiectiv al teoremelor matematice nu rezidă pentru Frege în faptul că ele sînt recunoscute ca adevărate de toată lumea; universalul consens rămîne un derivat al adevărului obiectiv și astfel obiectele matematice sînt independente de gîndire și reprezentare (vezi § 62, începutul), deși realitatea lor este fantomatică. Dimpotrivă, ar trebui să frapeze în afirmațiile lui Frege

atît distanțarea față de poziția platonică potrivit cu care numerele *au* realitate, cît mai ales față de Kant: obiectele pot fi date gîndirii, fără a fi date în reprezentare ori intuiție, spațiul și timpul nu sînt cadrul aprioric în care avem experiența posibilă a numărului. Noțiunea fregeană de obiect este radical distinctă de noțiunea kantiană (vezi § 89). Să recunoaștem totuși că problema existenței și adevărului în matematică ridică dificultăți considerabile, bănuite deja de Frege, dar amplificate considerabil în matematicile acestui secol. Toate aceste dificultăți provin într-un fel sau altul din inseparabilitatea epistemologiei entităților matematice de ontologia lor.

157 *Anzahl*: număr cardinal.

158 Aici stă în ultimă instanță originalitatea întreagă a demersului fregean în comparație cu toți precursorii și cu contemporanii lui, Cantor și Dedekind. Nimeni nu s-a adresat pînă la el propoziției numerice pentru a abstrage prin analiză pur logică numărul cardinal.

159 Propozițiile de recogniție la care se referă aici Frege sînt propoziții de identitate, adică propoziții de forma „*a* = *b*"; pentru orice semn „*a*" care desemnează un obiect, adică funcționează ca nume propriu, se cere să existe un criteriu spre a decide dacă „*a* = *b*" este adevărată sau nu. Criteriul nu trebuie să fie „operațional", el poate fi pur teoretic. Din explicațiile și exemplele furnizate aici și în secțiunile următoare (vezi în special precizarea ultimului alineat al § 63) rezultă că propozițiile de identitate care exprimă o recogniție nu sînt absolut arbitrare, ci trebuie să satisfacă și o condiție suplimentară, pe care Frege nu o formulează precis, — poate fiindcă prin natura ei comportă o impreciziune —, dar care ar putea fi descrisă eventual după cum urmează: „*a* = *b*" este o judecată de recogniție dacă *a* și *b* sînt obiecte de *același gen*. De exemplu, *a* și *b* trebuie să fie amîndouă numere naturale, sau amîndouă direcții ale unor drepte, sau amîndouă greutăți ale unor corpuri etc. Condiția de mai sus poate fi întărită astfel: „*a* = *b*" este o judecată de recogniție dacă „*a*" și „*b*" sînt nume proprii în cuprinsul cărora se semnifică *explicit* că entitățile desem-

nate sînt de acelaşi gen. O judecată de recogniție va avea atunci forma „ N[F] = N[G]" (pentru numere naturale), „direcția dreptei a = direcția dreptei *b*" (pentru direcții), „greutatea corpului *a* este aceeaşi cu greutatea corpului *b*" (pentru mase) ş.a.m.d. Dar însuşi conceptul de *număr* (*direcție*, *greutate* etc.) va fi subînțeles, urmînd a fi definit pe altă cale. Va putea fi el abstras direct din criteriul de identitate a judecăților de recogniție pentru numere? Răspunsul ni-l vor da secțiunile următoare.

160 David Hume, *A Treatise...*, 1, cap. III, § 1.

161 O primă trimitere la opera marelui Georg Cantor; confruntarea cu Cantor (a nu se confunda cu Moritz Cantor, citat în § 21) va continua în subcapitolul dedicat Numerelor infinite (§§ 84–86). A se vedea şi nota 53. — Frege crede că numerele nu pot fi abstrase plecînd de la mulțimi de lucruri oarecare, fără apel la concept, adică spunînd pur şi simplu: cînd două mulțimi pot fi puse în corespondență biunivocă, ele au acelaşi număr, iar apoi definind succesiv numerele. În ultimă instanță, dar numai în ultimă instanță, demersurile lui Cantor şi Frege sînt similare, însă ... *non una est si duo dicunt idem*! Analiza logică a mecanismului de abstragere l-a condus pe Frege în alte direcții decît pe Cantor. După cum reiese şi din referințele aduse, ideea lui Hume, adică punerea în joc a corespondenței biunivoce, fusese redescoperită şi era pe punctul de a deveni un bun cîştigat al comunității matematice.

162 Vezi nota 159.

163 Este vorba despre aşa-numitele definiții prin abstracție, studiate pentru întîia oară de către Frege, ceea ce a dus la o îmbogățire considerabilă a teoriei conceptului şi a teoriei definiției. Pentru acest procedeu Frege nu are vreo denumire specială; termenul de „definiție prin abstracție" provine de la Peano (1894), Russell preluîndu-l şi difuzîndu-l. Cantor, Frege, Dedekind, Russell au utilizat în mod independent acest procedeu în scopul definirii numărului cardinal.

164 Primul semn, adică semnul relației de paralelism, are un conținut nespecific, general, legat de ceea ce am putea numi (în

terminologie mai curînd booleană decît fregeană) proprietățile ei formale, care sînt tocmai proprietățile unei relații de echivalență; dar același semn mai are un „conținut specific", legat de natura relatelor sau de ceea ce într-o terminologie iarăși nefregeană (împrumutată din tradiția filozofică) se numește genul relatelor. În timp ce identitatea este o relație absolut generală, o relație de echivalență (adică: reflexivă, simetrică și tranzitivă) cum este aceea de paralelism mai are și un conținut specific. Dacă *a* și *b* sînt identice, atunci ele stau și în orice relație de echivalență definită pe un domeniu de obiecte căruia îi aparțin *a* și *b*, dar reciproca nu este valabilă: dreptele paralele, de exemplu, nu sînt identice (adică indiscernabile), dar au ceva identic — direcția.

165 În *Begriffsschrift*, Frege explicase deja posibilitatea obținerii unor concepte prin analiză logică a propozițiilor. Unul și același enunț poate fi analizat și descompus în mai multe feluri. Rămînînd deocamdată la ceea ce s-ar numi judecăți singulare și judecăți de relație: putem izola în mai multe moduri subiectul real și predicatul real al enunțării. În exemplul adus de Frege mai sus, judecata „dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*" poate fi înțeleasă ca o judecată care enunță o relație despre *a* și *b*; acesta ar fi, probabil, „modul inițial" al scindării, la care face aluzie Frege — inițial, întrucît el ni se impune *prima facie*. Aceeași judecată poate fi înțeleasă și ca afirmînd că *a* are *proprietatea* de a fi paralelă cu dreapta *b*, sau că *a* cade sub conceptul desemnat de „paralel cu b". Totuși, cînd Frege vorbește despre obținerea unui „nou concept", el se referă, după toate probabilitățile, la o transformare de un gen mai radical. „Paralel cu *b*" înseamnă „avînd aceeași direcție ca *b*", de unde ajungem la „dreptele *a* și *b* au aceeași direcție", adică „direcția lui *a* este identică cu direcția dreptei *b*". Mecanismul logic care permite aceste transformări va fi dezvăluit de Frege mai jos, la capătul unei analize minuțioase, care acoperă §§ 65–68.

166 Deși (1) *a* și *b* sînt paralele între ele dacă și numai dacă (2) direcția lui *a* este identică cu direcția lui *b* — avem deci o echivalență logică — relația din (1) este din punct de vedere epistemic

primară față de identitatea din (2). Frege argumentează, într-adevăr, că relația de paralelism ar fi mai intuitivă decît relația de identitate a direcțiilor. Acest argument epistemologic se poate generaliza dincolo de domeniul geometriei, observînd că echivalența sub un raport dat a două obiecte de același gen este cunoscută de regulă înaintea relației dintre clasele de echivalență astfel determinate, clase care sînt obiecte abstracte, entități la un nivel superior. De aici și caracterul așa zicînd mai intuitiv al primei relații. În limbajul teoriei mulțimilor: o relație de echivalență R definită pe un domeniu nevid determină o partiție a domeniului în clase de echivalență conținînd, fiecare, toate elementele echivalente *modulo* R, clase nevide, două cîte două disjuncte și acoperind prin reuniunea lor domeniul; invers, fiind dată partiția unui domeniu, există o relație de echivalență răspunzătoare de această partiție. Din punct de vedere gnoseologic, compararea obiectelor și echivalarea lor sub un criteriu dat constituie temeiul clasificării lor, deci este primară; în mod secund, dată fiind o anume clasificare, putem găsi întotdeauna o relație care o generează. Constatarea că două lucruri au aceeași culoare premerge abstracției culorii; compararea lucrurilor sub raportul greutății premerge abstracției greutății. Schimbul de mărfuri *in actu* este condiție a abstracției valorii și — operațional — posesorii de mărfuri știu prea bine ce înseamnă că două mărfuri distincte au aceeași valoare, deși fetișismul mărfii îi împiedică să ajungă la abstracția valorii. Prioritatea gnoseologică are de altfel și un pandant pur logic: pe baza unei relații de echivalență partiționarea este univocă, însă dîndu-se o partiție (mulțime-cît) putem ajunge la relații de echivalență intensional-distincte, deși avînd aceeași extensiune. Așa se explică, de altfel, că Dedekind, Peano și Frege au putut ajunge la definiții deosebite, dar echivalente, ale numerelor cardinale: ei porneau de la relații de echivalență distincte însă echivalente între ele. Expunerea acestor considerații în stil matematic ar fi de bună seamă mai elegantă, totuși aici nu putem decît să trimitem la cursul de logică matematică și teoria mulțimilor.

167 Definiția permite să înlocuim contexte de un tip determinat prin contexte de alt tip; ea nu determină „direcția unei

drepte", ci „identitatea direcțiilor", adică sensul unei propoziții de recogniție. De remarcat că în formularea de mai sus *definiens*-ul este pus înaintea *definiendum*-ului, ceea ce, fără să încalce vreo regulă logică, se abate de la uzanțe.

168 Doctrina logicistă presupune în mod esențial că identitatea este o relație logică și nu un concept matematic care vine să se adauge logicii; în timp ce un savant de talia lui Tarski, de exemplu, nu este singurul care consideră că divizarea termenilor în logici și extralogici este mai mult sau mai puțin arbitrară, logicistul se vede condamnat să includă semnul identității în rîndul constantelor logice, spre a fi în măsură să opereze reducția aritmeticii la logică. Legile identității vor fi deci pentru Frege legi logice eminamente analitice, *a priori*, iar semnul identității '=' unul din simbolurile primitive ale sistemului formal construit în *Grundgesetze der Arithmetik*. Frege introduce, de altfel, semnul identității încă în *Begriffsschrift*, dar acolo semnul are numai funcția de a exprima identitatea sensului unei expresii introduse prima oară cu sensul unei expresii date în prealabil.

169 Acesta este faimosul *principium identitatis indiscernabilium*, pe care Frege și-l însușește ca definiție a identității obiectelor: „Sînt aceiași acei [termeni] care pot fi substituiți unul în locul celuilalt păstrînd adevărul [unui enunț oarecare]." Pasajul din Leibniz continuă astfel: „Dacă avem A și B iar A intră într-o propoziție adevărată și substituția lui B pentru A oriunde acesta din urmă apare dă loc la o nouă propoziție care este de asemenea adevărată, și dacă aceasta se poate face pentru orice asemenea judecată, atunci A și B se spun a fi *aceiași*; reciproc, dacă A și B sînt aceiași, ei pot fi substituiți unul în locul celuilalt, așa cum am spus." Exegeții moderni remarcă inacuratețea semantică a formulării, întrucît A și B sînt înțeleși cînd ca termeni, cînd ca obiecte referite prin intermediul termenilor; Frege, atît de scrupulos în alte contexte, omite prilejul de a denunța aici confuzia între *semn* și *semnificat*, respectiv între menționarea și utilizarea expresiilor. Să fie acesta efectul admirației sale necondiționate față de Leibniz? Fapt este că, dacă principiul vizează identitatea obiectelor.

formularea leibniziană se referă la expresii desemnînd obiecte: în propoziții substituim *numele* obiectelor, nu obiectele însele. Dar în perioada *Fundamentelor aritmeticii* Frege nu clarificase pe deplin răspunsul la întrebarea cu care debutează „Despre sens și semnificație": ce este identitatea? O relație între obiecte sau între semne? Principiul identității indiscemabilelor, desemnat uneori și ca „legea lui Leibniz", se poate lămuri deci în două feluri, înlăturînd confuzia *use-mention*: 1) fie ca principiu conform căruia desemnările obiectelor identice sînt reciproc substituibile în orice context; sub această formă, principiul reglementează și așa-numita relație de denumire — *the name-relation* (vezi Rudolf Carnap, *Semnificație și necesitate*, p. 148); 2) fie ca principiu conform căruia $x = y$ dacă și numai dacă orice proprietate a unuia este proprietate a celuilalt. În prima sa formulare, principiul este (ori pare) contrazis în cazul contextelor neextensionale, înăuntrul cărora substituirea termenilor avînd aceeași semnificație însă sensuri diferite nu păstrează întotdeauna adevărul propoziției. Frege s-a străduit să salveze principiul, prin distincția între semnificații directe și indirecte.

170 Am tradus „Gleichheit", „gleich" cînd prin „egalitate", „egal", cînd prin „identitate", „identic". În mai multe ocazii Frege a subliniat că egalitatea înseamnă întotdeauna tocmai identitate. Observațiile făcute de autorul *Fundamentelor aritmeticii* în alineatul pe care tocmai îl comentăm erau mai puțin oțioase în epoca respectivă: Frege era contemporan și cu matematicieni care, „mai în glumă mai în serios", nu găseau nepotrivit să afirme că 1 + 1 este egal cu 2 însă nu identic! Dacă această confuzie între sensul și semnificația lui „1 + 1" și „2", respectiv între semn și semnificație, este astăzi eradicată, meritul revine lui Frege în primul rînd.

171 Autorul nu justifică totuși nicăieri această afirmație printr-o deducție formală. De altfel, el nici nu formalizează principiul lui Leibniz. — Privitor la modalitatea introducerii acestui principiu în *Fundamentele aritmeticii*, I. Angelelli ridică următoarele obiecții dure: „(1) Este *dogmatică* — «Leibniz dixit».

Trebuie reamintit că într-un sens Leibniz era modelul lui Frege, așa cum se afirmă în Cuvîntul înainte la *Begriffsschrift*. (2) Este *incoerentă*: Frege propune o analiză a conceptului identității, dar aceasta se reduce la adoptarea principiului lui Leibniz. (3) Este *falsă în ceea ce îl privește pe Leibniz*. Leibniz restrîngea *în mod sistematic* formula sa „eadem sunt...". „El nu privea formula sa ca pe o lege universală plauzibilă, ale cărei excepții sînt enigme surprinzătoare descoperite cu surle și trîmbițe (așa cum s-a întîmplat în filozofia post-fregeană). Pe de altă parte, nu este limpede motivul pentru care Frege adoptă tocmai această formulare foarte tare a principiului lui Leibniz. (4) Este, de bună seamă, *incompatibilă cu propria semantică a lui Frege*" (I. Angelelli, *op. cit.*, pp. 51--52).

172 Precizare importantă asupra principalului criteriu prin care deosebim obiectele de concepte: conceptul este predicat virtual, obiectul poate fi subiect al unui „conținut judicabil singular", sau, încă, o parte a predicatului acestuia din urmă. Caracterizarea conceptului ca predicat posibil este de obîrșie kantiană. Distincția concept-obiect va fi adîncită în „Funcție și obiect", „Despre concept și obiect". Autorul trece aici cu dezinvoltură de la expresii la semnificații; căci dacă articolul hotărît se aplică numelor proprii, însușirea pe care o are direcția axei Pămîntului de a fi subiect real al unui conținut judicabil singular este diferită de însușirea derivată de a fi subiect gramatical al propoziției în care se exprimă acest conținut judicabil și diferită de însușirea de a fi o parte a predicatului „identic cu direcția axei Pămîntului". Să fim deci atenți: 1) prin „conținut judicabil singular" Frege nu înțelege propoziția singulară, ci gîndul obiectiv exprimat într-o propoziție singulară; 2) prin „subiect", are în vedere subiectul real, referința unui nume propriu; 3) prin „predicat", are în vedere cînd expresia cu funcție de predicat, cînd conceptul desemnat de predicatul propoziției singulare. În pofida acestor corective, pasajul în ansamblul său este limpede și adînc.

173 Considerațiile dezvoltate pînă aici pot fi privite și ca obiecții anticipate împotriva operaționalismului, care vrea ca obiectele abs-

tracte (îndeosebi cele din științele fizice) și conceptele teoretice să prindă ființă pe baza unor operații de măsură. Operaționalismul nu este exact un mod particular al creaționismului definițional formalist criticat de Frege, dar are comun cu acesta încrederea în puterile genetice ale definițiilor.

174 S-ar putea crede că Frege amalgamează aici două genuri de definiții: acelea pur abreviative, a căror menire este să condenseze expresii mai lungi în expresii concise — nu altul este cazul definițiilor din sistemele formale —, și definițiile cu adevărat lămuritoare, care, pe lîngă că „stipulează semnificația unui semn", ca primele, mai spun și ceva despre această semnificație. Transformarea definiției într-o judecată în rînd cu altele înseamnă că definițiile de al doilea gen informează nu numai asupra (semnificației) SEMNULUI, dar și asupra SEMNIFICAȚIEI (semnului). Definițiile pe care Frege le va da numerelor naturale 0, 1, 2,... nu stipulează numai înțelesul unor semne, ci aduc informații noi, căci ele asociază unei semnificații cunoscute un sens încă necunoscut.

175 Lectura întregii secțiuni trebuie racordată la distincția sens–semnificație, pe care *în fapt* Frege o deține, deja, fără s-o numească și s-o dezvolte. În articolul său din 1892, Frege va spune că sensul unei expresii este modul în care este dată semnificația acesteia; analiza va porni atunci tot de la identități și propoziții identice. Definiția unui nume propriu este o propoziție de identitate; definiția este informativă în aceeași măsură ca orice judecată — nu este o tautologie goală, o identitate de genul „$a = a$" — întrucît *definiens*-ul, prin sensul său, dă într-un mod diferit semnificația *definiendum*-ului.

176 Identitatea extensiunilor conceptelor menționate rezultă din faptul că relația de paralelism între dreptele a și b este o relație de echivalență.

177 Relația de echinumericitate (*Gleichzahligkeit*) între concepte va fi analizată și definită pur logic în § 72. În construcția numărului cardinal, Cantor pornește de la o comparație analoagă

între mulțimi, introducînd o relație pe care o numește „echivalență". Bolzano dispunea deja de o asemenea relație, pusă în joc, de altfel, încă de către Galilei atunci cînd acesta stabilea aparent paradoxala corespondență biunivocă între mulțimea numerelor naturale 1, 2, 3, 4... și mulțimea numerelor pare 2, 4, 6, 8...

178 Încă nu am obținut definiția conceptului de „număr", dar aceasta rezultă imediat (vezi finele § 72) din definiția pentru „numărul care revine unui concept". De pe acum se întrevede ce este numărul cardinal: sfera unui concept definit pe baza relației de echinumericitate, concept înăuntrul căruia cad toate conceptele puse două cîte două în corespondența biunivocă după sfera lor.

179 Prin „echinumeric cu conceptul F" este desemnat un concept de ordinul doi, și anume proprietatea comună tuturor conceptelor față de care F stă în relația de corespondență biunivocă; or, această proprietate este (sau poate fi) tocmai aceea de a avea „un număr de elemente". Frege explică de ce nu ia însuși conceptul de ordin doi ca număr, ci ia mulțimea (de concepte) determinată prin acela din urmă. Primul punct al explicației sale nu necesită explicații suplimentare. Al doilea punct („conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă") face aluzie, probabil, la faptul că dacă N[F] (numărul care revine lui F) este *conceptul* „echinumeric cu F", atunci dacă G este echinumeric cu F, ar urma că N[G] este *conceptul* „echinumeric cu G" și astfel, deși ar trebui să avem N[F] = N[G], *qua* concepte cele două numere ar fi distincte. Dacă însă luăm sferele conceptelor „echinumeric cu F", „echinumeric cu G" în calitate de N[F] și N[G] atunci numerele coincid întrucît conceptele au aceeași sferă. — Ar fi interesant de știut ce vrea să spună Frege cînd pretinde „că ambele obiecții pot fi înlăturate". Dar aici se pot face doar simple conjecturi. În practică, Frege lucrează cu sfere de concepte. În legătură cu preîntîmpinarea primei obiecții, s-ar putea remarca — alături de Benno Kerry, a cărui observație va fi acceptată în substanță de Frege, dar peste mai mulți ani — că atunci cînd vorbim despre *Conceptul* X (aici: *Conceptul* „echinumeric cu F") vorbim deja despre un obiect, nu mai puțin ca atunci cînd am

vorbi despre extensiunea unui concept. În legătură cu a doua obiecție, este pertinentă observația făcută de Frege în alte lucrări printre care și *Recenzia* la *Filozofia aritmeticii* a lui Husserl: Frege spune că, deși relația de identitate este propriu-zis o relație definită numai pentru obiecte, conceptele avînd aceeași sferă se află într-o relație *similară*. Cu bunăvoință, afirmația s-ar putea interpreta ca permisiune de identificare absolută a conceptelor avînd aceeași sferă.

180 Analiza logică oferă antidotul acelui „element intuitiv" care se cere eliminat din fundațiile aritmeticii. Epistemologia fregeană a aritmeticii — în această etapă — este opusă celei kantiene prin circumspecția arătată față de intuiție.

181 Frege rezumă explicația dată în *Begriffsschrift*; importanța ei nu poate scăpa nimănui, în măsura în care se înțelege că logica predicatelor permite formalizarea relațiilor, rezolvînd astfel cu succes problema cea mai dificilă în fața căreia nu numai logica tradițională dar și algebra logică booleană eșuaseră. Aici, Frege lămurește cum degajăm dintr-un „conținut judicabil" elementele sale componente: concepte simple, concepte de relații. Analiza logică prin care ajungem la ele are caracterul unei descompletări, al ruperii unui întreg organic în părți recompozabile într-un conținut judicabil complet. Noutatea revoluționară a procedeului de formalizare impus de logica predicatelor nu este în nici un chip afișată, am spune mai degrabă că e camuflată. Frege are aerul de a recita o sagă veche de cînd lumea și nu de a sparge tiparele tradiției.

182 Ni se spune explicit că logica pură este nu numai a conceptelor simple, ci și a celor relaționale. Logica studiază nu conținuturi particulare, ci forme; adevărurile logice sînt analitice și deci *a priori*.

183 Această „formă generală" o vom simboliza prin „φab"; prin „Fa" va fi notat „a cade sub conceptul F" sau „a este F".

184 Așadar, relația binară φ include în domeniul ei sfera lui F iar în codomeniul ei sfera lui G dacă avem:

(a) $Fa \to \exists b(Gb \,\&\varphi ab) \,\&(a)\,(Ga \to \exists b(Fb \,\&\, \varphi ba))$. Aici, a şi b sînt utilizate în calitate de variabile individuale.

185 În simboluri: $(a)\,(Fa \to (\exists b)\,(Gb \,\&\, \varphi ab))$.

186 $(a) \sim (Fa \,\&\, (b)\,(Gb \to \sim \varphi ab))$. Formula este logic-echivalentă cu aceea de la nota precedentă.

187 $\sim \exists a Fa \to (a)\,(Fa \to (\exists b)\,(Gb \,\&\varphi ab))$. Spre deosebire de formulele de la notele 185 şi 186, aceasta este logic-adevărată, exprimă o lege logică. Validitatea formulei se întrevede cu uşurinţă: într-adevăr, presupunînd că antecedentul ei, adică $\sim \exists a Fa$, are loc, atunci Fa nu are niciodată loc, iar atunci şi consecventul formulei de la 187 (deci formula de la 185) are loc, ca implicaţie al cărei antecedent este întotdeauna fals.

188 $(b)\,(Gb \to \exists a\,(Fa \& \varphi ab))$. Formula este adevărată pentru orice G astfel încît $\sim \exists b Gb$.

189 $(a) \sim (Ga \,\&\, (b)\,(Fb \to \sim \varphi ba))$.

190 $(d)\,(a)\,(e)\,((\varphi da \,\&\, \varphi de) \to a = e)$. Relaţiile care prezintă proprietatea formală enunţată se spun a fi *multiunivoce* (*many-one*).

191 $(d)\,(b)\,(a)\,((\varphi da \,\&\, \varphi ba) \to d = b)$. Spunem că este o relaţie *unimultivocă* (*one-many*). O relaţie care satisface ambele condiţii se numeşte biunivocă (*one-one*). O relaţie biunivocă ce pune în corespondenţă obiectele subsumate unor concepte realizează o corespondenţă biunivocă între aceste obiecte.

192 Vom nota prin „Ech (F, G)“ expresia „F şi G sînt echinumerice“; aşadar Ech (F, G) este o relaţie de ordinul doi (sau, cum spune Frege în altă parte, de treapta a doua), relaţie ale cărei argumente sînt concepte. Vom nota prin Un_1 (φ) faptul că o relaţie satisface condiţia de multiunivocitate (vezi nota 190) şi prin Un_2 (φ) faptul că o relaţie satisface condiţia de unimultivocitate (nota 191). Mai departe, să prescurtăm prin „Cor_1 $(\varphi$, F, G)“ faptul că relaţia φ corelează obiectele subsumate conceptelor F şi G, adică satisface condiţiile de la 185 şi 188. Definiţia lui Frege capătă atunci următoarea formă concisă:

$$\text{Ech}(F, G) =_{df} \exists j(\text{Cor}_1(\varphi, F, G) \,\&\, \text{Un}_1(\varphi) \,\&\, \text{Un}_2(\varphi)).$$

Deși formula aparține logicii predicatelor de ordin superior, ca definind o relație între egalități aflate la un nivel superior indivizilor, *definiens*-ul nu este decît abrevierea unei formule din logica predicatelor de ordinul 1.

193 Vezi § 69; pentru a formaliza definiția avem nevoie de o notație pentru clase (= sfere, extensiuni de concepte). Frege notează extensiunea conceptului cu ajutorul unui operator similar operatorului lambda din logica de astăzi; extensiunile conceptelor F, G se pot nota deci prin $\acute{\alpha}F(\alpha)$, $\acute{\eta}G(\eta)$. Cu ajutorul λ-notației, extensiunile le vom nota prin λxFx, λyGy etc. (x, y sînt utilizate ca variabile individuale legate prin operatorul λ). Conceptul „echinumeric cu conceptul F“ este *abstras* din relația Ech(H, F) prin intermediul procedeului descris de Frege în § 70: Vom considera F ca fixat și H ca variabil, adică pe acesta din urmă îl vom privi ca pe un ocupant provizoriu al locului deținut într-un „conținut judicabil“ de forma „Ech(H, F)“; așadar, „Ech (~, F)“ va fi o notație potrivită pentru acest concept, „~“ marcînd locul liber, prin a cărui completare („umplere“) cu concepte de ordinul 1 se obțin propoziții adevărate sau false. Definiția lui Frege se prezintă acum sub forma:

$$N[F] =_{df} \lambda H(\text{Ech}(H, F)).$$

În cadrul acestei formule F poate fi privit ca variabilă liberă luînd ca valori concepte, iar H este o variabilă de același gen, legată prin aplicarea λ-operatorului la formula Ech(H, F). În locul lui H putem alege orice altă variabilă definită pe același domeniu, de ex. G, L, ... etc.

194 Notînd prin $\mathcal{N}(n)$ expresia „n este un număr“, vom avea:

$$\mathcal{N}(n) =_{df} (\exists F)\,(N\,[F]) = n).$$

195 Se va demonstra, prin urmare, validitatea formulei:

$$\text{Ech}(F, G) \rightarrow N[F] = N[G].$$

196 $\text{Ech}(F, G) \rightarrow (\lambda H.\ \text{Ech}(H, F) = \lambda H.\ \text{Ech}(H, G)).$

197 După ce formula de la nota 195 a fost echivalată, conform definiției pentru „numărul care revine unui concept“, cu formula de la 196, aceasta din urmă se dovedește echivalentă cu:

$$Ech(F, G) \rightarrow (H) [(Ech(H, F) \rightarrow Ech(H, G)) \& (Ech(H, G) \rightarrow Ech(H, F))].$$

Această formulă afirmă tocmai că în ipoteza Ech(F, G) orice concept echinumeric cu F este un concept echinumeric cu G și reciproc; altfel spus, în ipoteza amintită, sferele conceptelor „echinumeric cu F“, „echinumeric cu G“ sînt identice:

$$\lambda H. Ech(H, F) = \lambda H. Ech(H, G).$$

198 În nota 192 s-a introdus definiția $\exists\varphi(Cor_1(\varphi, F, G) \& Un_1(\varphi) \& Un_2(\varphi))$ pentru Ech(F, G); această definiție o vom abrevia, introducînd $Cor_{1-1}(\varphi, F, G) =_{df} Cor_1(\varphi, F, G) \& Un_1(\varphi) \& Un_2(\varphi)$. Cu alte cuvinte, am notat prin $Cor_{1-1}(\varphi, F, G)$ „relația φ pune în corespondență biunivocă obiectele care cad sub F cu cele de sub G“. Avem: $Ech(F, G) \leftrightarrow (\exists\varphi)Cor_{1-1}(\varphi, F, G)$. Acum, Frege arată că „prima propoziție“, *id est* $Ech(F, G) \rightarrow (Ech(H, F) \rightarrow Ech(H, G)$ (presupunînd că H este un concept oarecare), este echivalentă cu afirmația:

$$[(\exists\varphi) Cor_{1-1}(\varphi, F, G) \& (\exists\psi) Cor(\psi, H, F)] \rightarrow (\exists\chi) Cor_{1-1}(\chi, H, G).$$

199 Fiind date relațiile φ și ψ care satisfac condițiile de a corela biunivoc conceptele F, G respectiv H, F se cere să determinăm o relație χ care să coreleze biunivoc conceptele H, G. Frege arată că ceea ce numim astăzi *produsul relațiilor* φ și ψ satisface condiția cerută. Produsul necomutativ al celor două relații, notat prin ψ/φ, se definește: $(\psi/\varphi)(c, b) =_{df} (\exists a)(\psi ca \& \varphi ab)$, pentru orice c și b. Așadar, χ este aici ψ/φ. În teoria relațiilor (sau logica predicatelor) se demonstrează că produsul a două relații biunivoce este tot o relație biunivocă și că, dacă mulțimea A este pusă în corespondență biunivocă cu B, iar la fel B cu C, atunci mulțimile A, C pot fi puse la rîndul lor în corespondență biunivocă.

200 Este vorba de propozițiile: $((Ech(F, G) \& Ech(H, G)) \rightarrow Ech(H, F)$ și $N[F] = N[G] \rightarrow Ech(F, G)$

201 Întrucît formula ($x = x$) definește un concept, și anume unul sub care cade orice obiect, este într-adevăr o lege a identității că $(x)(x = x)$; negația formulei $x = x$, pe care o notăm prin $x \neq x$ definește un concept sub care nu cade nici un obiect, cu alte cuvinte avem ca lege a identității: $\sim (\exists x)\ (x \neq x)$. Aceasta justifică definiția: $0 =_{df} N\ [x \neq x]$.

202 Observație fecundă, putînd da loc la diferite precizări și dezvoltări, în funcție de filozofia și aparatul logic cu care lucrăm Pe baza logicii clasice, a logicii intuiționiste, a logicii modale și a diverselor teorii asupra descripțiilor și definițiilor, admiterea conceptelor sub care nu cade nici un obiect și (în particular) a conceptelor contradictorii găsește diferite explicații însă nici un contraargument decisiv. Frege pare a asimila aici conceptele sub care nu cade nimic cu conceptele care conțin o contradicție, aparență dezmințită de alte afirmații în sensul că demonstrația de necontradicție nu oferă *eo ipso* o demonstrație de existență.

203 Avem aici o expunere concisă a teoriei descripțiilor definite în varianta sa fregeană. Termenul „descripție“ este propus de Russell, însă prima analiză în logica modernă a descripțiilor a fost inițiată de Frege. Russell va trasa o linie despărțitoare între nume proprii și descripții — primele avînd referință, nu și sens, ultimele avînd în mod primar sens și ajungînd, ca „simboluri incomplete“, să refere abia în contextul propozițiilor; Frege în schimb privește descripția individuală definită — „definiția unui obiect pe baza unui concept căruia i se subsumează“ — tot ca pe un nume propriu. Expresia care prezintă trăsăturile formale ale unei descripții definite (de ex., admite articolul hotărît, respinge articolul nehotărît și cuprinde în sine expresii conceptuale) „are un conținut“, *id est* un sens dacă și numai dacă conceptul prin care se introduce respectivul individ are proprietățile existenței și unicității. Limba obișnuită nu poate fi epurată de pseudodescripții — expresii pentru care nu se asigură existența și unicitatea semnificației —, însă Frege își pune problema de a asigura cel puțin sistemului formal al aritmeticii capacitatea de preîntîmpinare a pseudodescripțiilor (a se vedea pentru detalii *Grundgesetze der*

Arithmetik, vol. 1). Metodele de analiză semantică a expresiilor își găsesc expresie și motivare în diversitatea modalităților de înțelegere a descripțiilor definite. În consecință, asistăm acum la o adevărată explozie de teorii și metode care analizează descripțiile sub două aspecte: 1) semnificația și utilizarea descripțiilor în limbile naturale și în limbile științifice neformalizate; 2) introducerea cît mai satisfăcătoare a descripțiilor în sistemele formale. Printre analizele și metodele cele mai influente se numără cele propuse de Russell, Hilbert și Bernays, Carnap, P. F. Strawson, Keith S. Donnellan, Kripke. Din vasta bibliografie dedicată descripțiilor definite propunem cititorului să aleagă, pentru început, cap. X, secțiunea 2. (Teoria descripțiilor și varietatea desemnărilor) din *Dezvoltarea logicii* de W. și M. Kneale (ed. rom. vol. II, pp. 228–236) și cap. I, §§ 7, 8 (Descripțiile individuale: Metoda lui Frege pentru descripții) din *Semnificație și necesitate* de Rudolf Carnap (pp. 77–85). În logica tradițională, problema descripțiilor a fost de asemenea analizată; în Logica de la Port-Royal, găsim, de exemplu, o fină analiză a „termenilor singulari complecși“, expresii prin care se înțelegeau tocmai ceea ce astăzi numim descripții (vezi Dragan Stoianovici, „Definite Descriptions in Port-Royal Logic“, în *Rev. Roum. Sci. Sociales, Philosophie et Logique*, vol. 20, nr. 2, 1976, pp. 145–154).

204 Astăzi obișnuim a spune (*apud* Church) că „*a* cade sub conceptul F“ — adică „F(*a*)“ — este o formă propozițională definind funcția propozițională însăși, *id est* conceptul F; forma conține o variabilă liberă și se transformă într-o propoziție adevărată sau falsă dacă în locul lui *a* substituim numele unui obiect. „Conținut judicabil“ înseamnă pentru Frege „gînd“ a cărui valoare de adevăr o putem recunoaște, asertîndu-l în cazul cînd îl recunoaștem ca adevărat, întrebîndu-ne dacă este adevărat, asertînd negația sa în cazul cînd este recunoscut ca fals.

205 $(x \neq x)(a)$ înseamnă același lucru ca „$a \neq a$“.

206 Pasajul suscită cîteva comentarii. 1) Întrucît în locul unui concept pur logic ca acela al non-identității putem lua orice concept de sferă vidă, se creează impresia că definiția logicistă a lui

zero și a șirului numerelor naturale conține un element arbitrar: putem avea o definiție a lui zero în termeni logici, dar de vreme ce mai putem avea alta prin intermediul unor concepte factuale, nu rezultă că natura analitică a matematicii este o posibilitate, nu o necesitate stringentă? Nu cumva însăși distincția analitic-sintetic își dovedește astfel precaritatea? În literatura filozofică, posibilitatea unor definiții alternative (e drept, nu în termeni factuali, ci în termenii teoriei mulțimilor) a stîrnit deja oarecare impaciență. Indubitabil, Frege întrevăzuse caracterul întru cîtva arbitrar al definiției numărului, fără să se arate alarmat de împrejurarea că orice definiție conține un element arbitrar; uneia și aceleiași semnificații i se pot asocia sensuri diverse, dintre care definiția are latitudinea să aleagă. Dar tulburătoare în cazul de față este nu posibilitatea unor definiții alternative ale numărului, ci posibilitatea unor definiții „factuale", în contrast cu definițiile pur logice. Obiecția poate fi însă parată, observînd că distincția între concepte „logice" și „factuale" nu este atît de solidă în cazul conceptelor de sferă vidă; „munte de aur", concept de sferă vidă, nu este un concept *logic*, dar s-ar părea că aceasta nu ne îndrituiește să-l numim *factual*. 2) Asupra „definiției" identității la Leibniz, a se vedea nota 171; aici să adăugăm că o formalizare posibilă a principiului substitutivității identicilor rezidă în axiome ale identității, care sînt enunțuri de forma

$$(x)\,(y)\,(z)\,(x = y \rightarrow (Fx \rightarrow Fy));$$

Quine a emis teza că orice interpretare a cuantorilor presupune substitutivitatea identicilor. Teza lui Quine rămîne în continuare controversată; în jurul interpretărilor cuantorilor a avut loc de asemenea în ultimul deceniu o discuție al cărei sfîrșit nu se întrevede în viitorul apropiat, întrucît afirmații în aparență incompatibile pot fi susținute prin construirea unor sisteme logice în egală măsură coerente.

207 $(F)(G)\,((\sim \exists a Fa \;\&\; \sim \exists a Ga) \rightarrow \text{Ech}\,(F, G))$; formula exprimă prima parte a aserțiunii adnotate.

208 $(F)\,(\sim \exists a Fa \leftrightarrow N[F] = 0)$

209 Avem: $(\sim\exists aFa \ \& \sim \exists aGa) \rightarrow (\exists\varphi) Cor_{1-1} (\varphi, F, G)$. Vezi și notele 187, 188.

210 Prescurtăm prin „$S(n, m)$" expresia „n succedă imediat lui m în șirul numerelor naturale". Avem următoarea definiție:

$$S(n, m) =_{df} (\exists F) (\exists x) (\exists G) (Fx \ \& \ N[F] = n \ \& \ (y) (Gy \leftrightarrow (Fy \ \& \ x \neq y)) \ \& \ N[G] = m).$$

Membrul drept al definiției este o formulă în care singurele variabile libere sînt n și m; expresia definește, așadar, o relație diadică, în speță $S(n, m)$.

211 Se vă demonstra formula $(\exists x) S(x, 0)$.

212 Particularizăm F și G din definiția de la nota precedentă prin „$x = 0$" și respectiv „$(x = 0 \ \& \ x \neq 0)$", iar pe m prin 0. Se observă că utilizăm în mod esențial pentru G un concept de sferă vidă, introdus printr-o expresie evident contradictorie. Avem: $N[G] = N[x = 0 \ \& \ x \neq 0] = 0$ m este particularizat prin 0. Avem, de asemenea, $S(n, 0)$. Pentru conceptul de a fi identic cu 0 sînt evidente atît existența cît și unicitatea obiectului care cade sub el. Acest obiect este numărul 0. Numărul conceptului sub care cade numărul zero și numai zero este 1. Definiția: $1 =_{df} N[x = 0]$ revine la a-l defini pe 1 ca succesor imediat și unic al lui 0.

213 Frege identifică în acest context „faptul observat" cu „propoziția non-generală", adică existențială. Afirmația că nici un element subiectiv nu intră în definiția numărului rămîne desigur valabilă.

214 Pasajul evidențiază pentru elementul obiectivist al concepției fregeene: condițiile cunoașterii nu sînt dătătoare de seamă pentru conținutul ei și, în orice caz, nu pot fi puse în vreo conexiune cu adevărul propoziției. Gîndirea nu creează prin activitatea sa adevărul.

215 $S(a, 0) \rightarrow a = 1$.

216 $(F) (N[F] = 1 \rightarrow \exists xFx)$.

217 $(F)(x)(y)((N[F] = 1 \& Fx \& Fy) \rightarrow x = y)$.

218 $(F)(x)(y)((Fx \& Fy \rightarrow x = y) \rightarrow (\exists z Fz \rightarrow N[F] = 1))$.

219 $Un_{1-1}(S)$ Vezi notele 190–192.

220 $(x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y) S(x, y))$.

221 Se cere să se demonstreze $(n)(N(n) \rightarrow \exists m S(m, n))$.

222 În *Begriffsschrift*, Frege a introdus noţiunea de *proprietate ereditară în cadrul unui şir*; este ceea ce în logica simbolică de astăzi numim proprietate ereditară în raport cu o relaţie dată. Spunem că *proprietatea F este ereditară în raport cu relaţia* φ — şi vom scrie „Her(F, φ)" — dacă proprietatea în cauză este transmisibilă de la oricare membru întîi al relaţiei la membrul doi corespunzător. În simboluri: $Her(F, \varphi) =_{df} (x)(y)((Fx \& \varphi xy) \rightarrow Fy)$. Frege vorbeşte despre „şiruri" (*Reihen*) generate prin „operaţii" (*Verfahren*) şi nu „relaţii", însă definiţia proprietăţilor ereditare rămîne în esenţă aceea de mai sus. Mai departe, Frege defineşte în *Begriffsschrift* relaţia de succesiune în cadrul unui φ – şir. Notînd prin $S\varphi(y, x)$ „*y* succedă în şirul φ lui *x*", definiţia dată de Frege revine la:

$$S\varphi(y, x) =_{df} (a)(F)(\varphi(x, a) \rightarrow Fa) \& Her(F, \varphi)) \rightarrow Fy).$$

Definiţia spune că *y* este succesor al lui *x* în şirul generat de relaţia φ dacă *y* se bucură de orice proprietate ereditară relativ la φ de care se bucură şi orice rezultat al aplicării relaţiei (operaţiei) φ la *x*. În terminologia russelliană, numim această relaţie Sφ *ancestral* al relaţiei φ. Astfel, ancestralul relaţiei de la tată la fiu este relaţia (de descendenţă) de la strămoş la urmaş: *x* este strămoş al lui *y* dacă *orice* proprietate ereditară (evident nu numai biologică, ci şi logică) transmisă de *x* fiilor săi este o proprietate a lui *y*. Întrucît printre aceste proprietăţi ereditare se numără şi proprietatea de a *descinde din x*, valabilitatea afirmaţiei este evidentă. Aşadar, pentru orice relaţie φ, $S\varphi(y, x)$ are loc dacă şi numai dacă aplicarea iterată de un număr oarecare de ori a relaţiei φ, pornindu-se de la *x*, duce la *y*.

223 Relația φ determină o anumită ordonare a argumentelor pentru care relația are loc; proprietățile formale ale ordinii respective variază în funcție de natura relației, care poate fi multiunivocă (*many-one*), unimultivocă (*one-many*) ş.a.m.d.

224 Poziție materialistă; interpretarea pasajului nu comportă nici o ambiguitate. În chip vădit, materialismul istorico-naturalist al epocii nu rămîne fără ecou în gîndirea lui Frege.

225 Ar fi interesantă aici comparația între Frege şi intuiționişti. Frege formulează în termeni de rezonanță intuiționistă („atenție", „criteriu de decizie a unei probleme") întrebări cărora le dă răspunsul „logicii clasice". Este o solidaritate de esență între principiile logicii clasice, succint rezumate aici (cu acceptarea implicită a legii terțiului exclus ca lege universală, ce nu admite excepții) şi poziția aşa zicînd platonică: adevărul etern, obiectiv, transtemporal, negrevat de presupoziții epistemologice, al legilor logicii şi matematicii. În ultimul timp s-a vorbit mult despre caracterul preponderent epistemologic şi nu ontologic al filozofiei fregeene, însă unui exces riscă să i se răspundă prin altul de semn opus dacă trecem uşor peste postulatul evident acceptat de către logicianul de la Jena, şi anume că nici un considerent de ordin epistemic — deci implicînd o referire la subiectul cognitiv — nu interferează cu conținutul obiectiv adevărat al propozițiilor logico-matematice.

226 Relația S (*n*, *m*) este tranzitivă.

227 Cititorul întrevede cu uşurință forma de raționare la care se face aluzie: inducția matematică, cunoscută sub numele de inducție bernoullică (vezi *Begriffsschrift*, nota lui Frege). Jacob Bernoulli (1654–1705) era într-adevăr considerat pionierul acestei metode folosite în matematici pentru prima dată de către Pascal.

228 Notăm prin $Seq_n(m)$ forma propozițională „*m* este un membru al şirului de numere naturale 0, 1,... *n*"; pentru *n* = 1, 2, ... obținem de fiecare dată un alt concept. Fie un *n* determinat; Frege îşi propune să arate că există un *m* astfel încît acesta este cel mai mic număr care este succesor al lui *n*, şi anume $m = N[Seq_n]$.

229 Se are în vedere aici inducția incompletă, în opoziție cu aceea matematică, numită și „completă"; ultima conduce la propoziții universale și certe, cum este tocmai propoziția a cărei demonstrație (inductivă) va fi schițată.

230 Notînd prin „S (n, m)" forma propozițională „n succedă imediat lui m în șirul numerelor naturale" (a se vedea nota 210), constatăm că relația de succesiune în șirul numerelor naturale este ancestralul relației S, adică este Sφ (vezi nota 222). Se caută demonstrația formulei: S(N[Seq$_n$], n). Pentru aceasta — arată Frege — se va demonstra în primul rînd că, dacă S (a, d) și S(N[Seq$_d$], d), atunci S(N[Seq$_a$], a). În al doilea rînd, trebuie demonstrat că S(N[Seq$_0$], 0).

231 Procedeul demonstrativ utilizat de către Frege este, evident, inducția matematică. Principiul inducției matematice se exprimă în logica predicatelor de ordinul 1 prin schema: $(n)(F(0)$ & $F(n) \rightarrow F(n + 1)) \rightarrow (n)F(n)$. În cadrul axiomatizării Peano a aritmeticii, schema inducției matematice îmbrățișează o infinitate de axiome, obținute prin substituții de constante predicative în F. Considerată ca schemă de formule a logicii de ordinul 1, nu poate fi vorba de o validitate logică a principiului pe care această formulă îl exprimă. Analizată în continuare prin intermediul definițiilor introduse de Frege, schema conduce la un principiu logic-valid, dar acesta este un principiu valid al logicii predicatelor de ordin superior. Principiul afirmă că o proprietate a lui 0 ereditară relativ la relația S este universală.

232 Se cere demonstrația unei aserțiuni a cărei simbolizare nu decurge la fel de simplu ca mai sus. Anterior, de exemplu, spre a desemna conceptul „membru al șirului de numere naturale terminat cu a", am introdus notația „Seq$_a$", simplificînd printr-un tacit abuz de limbaj o notație de genul lui „Seq$_a$( )", în care *locul* argumentului ține de notația funcției. Frege susține că o notație corectă trebuie să respecte această condiție; pentru explicații detaliate, a se vedea „Funcție și concept", „Despre concept și obiect". Ne convingem prin încercări că o notație rezonabilă pentru conceptul „membru al șirului de numere naturale termi-

nat cu a, dar nu identic cu a" trebuie să respecte pretenția emisă de Frege în cazul cînd conceptul însuși devine argument al altui operator, cum este „N". Vom scrie, de exemplu, „$Seq_a(\xi)$ & $(\xi \neq a)$", convenind, *apud* Frege, că ξ nu umple locul gol, ci doar îl reprezintă ca atare. Preferințele noastre se îndreaptă totuși spre notația-lambda, dat fiind că o expresie de genul „$\lambda x F x$" poate fi utilizată atît pentru clase, cît și pentru predicate (respectiv, concepte și extensiunile lor). — În notația — lambda „$a = N [\lambda x(Seq_a(x) \& (x \neq a))]$" ar simboliza propoziția logică de la începutul § 83.

233 Așadar, va trebui demonstrată validitatea universală a implicației: $S(a, d) \rightarrow \lambda x(Seq_a(x) \& (x \neq a)) = \lambda x(Seq_d(x))$.

234 Abreviind prin „$Seq(x)$" expresia „x este un membru al șirului numerelor naturale terminat cu d", se cere demonstrată propoziția: $\sim \exists x(Seq_d(x) \& S(x, x))$.

235 Definirea numărului finit conduce implicit la numerele infinite despre care va fi vorba în subcapitolul următor. În esență, numărul infinit este un obiect x, astfel încît există un concept F și x este numărul lui F (adică sfera conceptului sub care cad toate conceptele echinumerice cu F) și totodată $S(x, x)$. Ultima proprietate se numește *reflexivitate*. Numerele cardinale finite sînt ireflexive, cele infinite sînt însă reflexive. În limbajul teoriei mulțimilor, spunem că o mulțime este (de putere) infinită dacă poate fi pusă în corespondență biunivocă (fiind deci echinumerică) cu o parte proprie a sa. Aceasta este definiția infinitului pe linia Galilei--Bolzano--Dedekind. În definirea infinitului și finitului se mai poate utiliza altă proprietate, și anume *inductivitatea*. Un număr cardinal îl numim inductiv dacă este zero sau se obține prin adăugare succesivă de unități plecînd de la zero și construind pas cu pas succesorii săi, 1, 2, 3... Numerele cardinale finite sînt inductive; numerele infinite au așadar proprietatea non-inductivității. Principiul inducției matematice este aplicabil tocmai la numerele inductive, adică finite.

236 În încheierea acestui subcapitol în care am făcut apel adesea la limbajul formulelor se cer cîteva precizări: *Fundamentele aritmeticii* ocupă o poziție mediană în tripticul marilor cărți ale

lui Gottlob Frege, încadrată fiind de *Scrierea conceptuală* și *Legile fundamentale ale aritmeticii*, cărți în care aplicarea limbajului specios al formulelor solicită toată perspicacitatea cititorului și satisface într-o măsură rareori egalată spiritul lui de acribie. Transcrierea asertiunilor logico-aritmetice în notațiile originare se poate urmări în *Begriffsschrift* (vezi în special cap. III, „Einiges aus einer Allgemeinen Reihenlehre") și în *Grundgesetze*, I (în special §§ 38–46). O vastă listă de lucrări din logica matematică și filozofia matematicii s-ar cere menționată în legătură cu ecourile și răsfrîngerile de care demersul de logicizare a aritmeticii a avut parte, de la Cantor, Husserl, Russell și pînă astăzi. Pentru transcrierea modernă a formulelor fregeene am consultat cîteva lucrări introductive în materie, printre care excelenta *Einführung in die symbolische Logik* a lui Rudolf Carnap (Springer-Verlag, dritte Auflage, 1968). Notațiile sînt uzuale, exceptînd cîteva modificări minore.

237 Frege vorbește despre numerele infinite introduse de Cantor ca despre obiecte familiare oricărui matematician, ceea ce poate surprinde, întrucît acceptarea lor — cum știm — a presupus o penibilă perioadă de acomodare a matematicianului obișnuit la un nou mod de a gîndi numărul ca abstras din compararea mulțimilor oarecare. Fără îndoială că Frege ajunsese la numărul infinit pe propria lui cale, independent de Cantor, tot așa cum în *Begriffsschrift* redescoperise vechea logică a stoicilor și acoperise pe cont propriu domeniul îmbrățișat de algebra logicii.

238 Ceea ce este numai formularea exactă a faptului că avem o infinitate de numere finite. Întrebarea adiacentă este dacă orice număr infinit trebuie să revină unui concept sub care cad entități abstracte, de natură matematică, sau dacă putem găsi un concept îmbrățișînd numai entități concret-materiale și căruia îi revine un număr infinit.

239 În timp ce Cantor se vedea obligat să recurgă la speculații metafizice nebuloase — un întreg amalgam de considerații laic-filozofice și teologice! — pentru a asigura numerelor și mulțimilor infinite „dreptul la viață", Frege rămîne pe terenul solid al

logicii, cu încredințarea că infinitul nu necesită o intuiție sau reprezentare specială, ci numai o recunoaştere rațională.

240 Georg Cantor (1845–1918), unul din titanii matematicii, pe cît de contestatar pe atîta de contestat, a creat teoria mulțimilor, aritmetica numerelor transfinite, a pus piatra fundamentală la temelia topologiei şi a adus contribuţii marcante în algebră şi teoria funcţiilor. S-a ocupat totodată de istoria matematicii şi filozofia infinitului. Printre operele sale se numără *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (însumarea a şase memorii elaborate între anii 1879 şi 1884, adică exact între anii în care apar *Begriffsschrift* şi *Grundlagen der Arithmetik*!) şi *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895–1897). „Fundamentele unei teorii generale a varietăților" — la care se referă aici Frege — apăruse în broşură separată înainte de a intra, ca al cincilea memoriu, în prima din cărțile sus-menționate. Fragmente substanțiale din opera lui Cantor sînt accesibile cititorului de limbă română în Oskar Becker, *Fundamentele matematicii*, Ed. Şt., 1968, pp. 308–346 şi Jean Cavaillès, *Studii asupra teoriei mulțimilor*, Ed. Şt., 1969, pp. 145–208. — Opera lui Cantor a deschis matematicii porțile unui tărîm nou, infinitul actual: un paradis — după expresia lui Hilbert — din care matematicienii refuză a se mai lăsa izgoniţi. Pe baza teoriei mulțimilor creată de Cantor s-a putut clădi întreaga matematică existentă, însă gravele dificultăți de ordin fundațional suscitate de teoria mulțimilor au deschis o etapă de criză fără precedent în fundamente; inaugurată de descoperirea paradoxelor, criza n-a putut fi soluționată integral nici prin axiomatizările succesive ale teoriei mulțimilor de către Zermelo-Frenkel, von Neumann, Hilbert-Bernays ş.a., şi nici prin edificarea teoriei tipurilor. Astăzi ştim că nu se poate da o demonstraţie absolută de consistență pentru teoria mulțimilor, că nu putem decide între axioma alegerii şi negația ei, între ipoteza continuului şi negația ei; asemenea rezultate negative, obținute de Gödel, Cohen ş.a., se înscriu ca tot atîtea dezmințiri ale promisiunii de paradis platonic al cunoaşterii matematice, promisiune pe care părea s-o aducă cu sine teoria mulțimilor. În contrast cu statutul fundațional incomod al teoriei mulțimilor, aceasta oferă

confort tehnic și asistență întregii matematici, transformînd-o într-o știință a structurilor. Raportul dintre logică și teoria mulțimilor ridică întrebări a căror lămurire — în măsura în care poate fi vorba de așa ceva într-un domeniu prin excelență deschis – depășește acest cadru: este oare teoria mulțimilor varianta pur extensivistă a logicii de ordin superior, iar logica predicatelor combinată cu teoria tipurilor o complicare comprehensivistă a teoriei mulțimilor? Și, în definitiv, este logica de ordin superior logică propriu-zisă? Iar teoria mulțimilor este ea o teorie matematică bună? Vocile minoritare care au răspuns în sens negativ nu vin totuși de la periferia matematicii; e vorba despre un Brouwer, de pildă, cînd trecem în revistă evaluările care înscriu teoria clasică a mulțimilor la pasivul matematicii. Corespondența și divergențele dintre punctul de vedere logic și cel al teoriei mulțimilor sînt personificate de eșecul dialogului Frege–Cantor (cf. și Notița introductivă). Deși este schematică și pînă la urmă incorectă conceperea logicii și teoriei mulțimilor ca două limbaje în totul diferite care spun aceleași lucruri despre aceleași lucruri, reducerea aritmeticii la logică se dovedește echivalentă cu reducerea ei la teoria mulțimilor. Pe acest teren mai restrîns, echivalarea chestionată mai sus devine deci posibilă, iar cititorul lui Frege, dacă este matematician, va înclina să spună că logicismul lui Frege era o primă încercare de a reduce numărul la mulțime, însă o încercare avînd forma inutil complicată, alambicată cu subtilități filozofice, de care ne putem prea bine dispensa. Nu se poate obiecta nimic acestui punct de vedere — în afară de faptul că uită de dragul matematicii interesul dezvoltării logicii ca știință de sine-stătătoare. Dar era acesta din urmă un interes fregean?

241 Am simțit nevoia să traducem aici „Wirklichkeit", adică „realitate", prin „actualitate"; terminologia lui Frege manifestă o anumită inconsecvență, deoarece în § 26 se făcea o distincție între *obiectiv* și *real* (*das Wirkliche*). Dacă ar fi rămas fidel acelei terminologii, Frege trebuia să spună că numerele infinite sînt obiective, fără a fi propriu-zis reale.

242 Cantor numește „Mächtigkeit" ceea ce Frege numește „Anzahl".

243 Am tradus ad-hoc „Folgen in einer Succession“ prin „succesiune în cadrul unei consecuții“, iar „Folgen in einer Reihe“ prin „succesiune într-un șir“.

244 Într-adevăr, din punct de vedere epistemologic Cantor pune în joc în mod esențial intuitivitatea construcțiilor matematice, în timp ce Frege invocă numai raționalitatea intrinsecă a conținutului.

245 În pofida unor observații terminologice minore, Frege înțelege însemnătatea rezultatelor cantoriene, solidarizîndu-se cu orientarea filozofică subiacentă. Singura divergență mai serioasă privește numărul ordinal. Cantor introduce pentru mulțimile transfinite neglijate de către Frege numărul respectiv ca tip de ordine (*Ordnungstypus*).

246 Ultimul capitol al cărții lui Frege nu este un simplu rezumat al analizei logico-filozofice, ci reluarea și adîncirea cîtorva teme, printre care definiția numărului întreg pozitiv și a celorlalte genuri de numere, critica teoriilor formale ș.a.

247 Frege se exprimă precaut, vorbind despre plauzibilitatea (probabilitatea: *Wahrscheinlichkeit*) și nu certitudinea tezei logiciste asupra naturii analitice a enunțurilor aritmetice. El se explică și în § 90. Pentru a certifica teza mai rămîneau să fie deduse pas cu pas legile aritmeticii, pe baza definițiilor instituite. Acestei sarcini, Frege i se dedică în *Grundgesetze der Arithmetik*. Pînă la urmă însă, din cauza inconsistenței sistemului, teza logicistă va deveni încă mai puțin plauzibilă.

248 Axiomatizarea logicii se substituie, potrivit acestui punct de vedere, axiomelor aritmeticii. În fapt, în capitolul anterior Frege a tradus deja ceea ce mai tîrziu vor fi axiomele lui Peano în enunțuri și definiții logic-valide.

249 Să se observe că Frege nu reifică obiecte abstracte ca numerele, după cum nu reifică suportul numerelor, conceptele deci; un imperiu autonom al conceptelor este de negăsit la logicianul german. E drept că ulterior formulările sale (în „Der Gedan-

ke", de exemplu) capătă o coloratură platonică mai pronunțată Frege vorbind tocmai despre a treia lume — a gîndului. Dar ș atunci accentuarea punctului de vedere realist nu ajunge la fantasmagoria unei lumi autonome, desprinsă de subiect și obiect. În pasajul la care am poposit, Frege spune pur și simplu: conceptele și numerele nu sînt obiecte concret-materiale în spațiu, așa cum nu sînt nici evenimente psihice temporale, reprezentări.

250 Motivație subtilă a tezei logiciste: conceptele — se sugerează — există și ele în judecăți, adică în stări de lucruri care *pot fi* gîndite și exprimate în limbaj. Nu mai avem a ne întreba *unde* există numerele, căci ele nu există independent de concept, dar conceptul nici el nu există decît în și prin judecată. Dar judecățile însele? Realismul conceptual al logicii tradiționale va fi fost el tradus de Frege într-un realism judicațional? Dar un realism care nu ajunge la hipostazierea judecăților, adică la constituirea lor într-o lume autonomă și primordială își onorează titulatura. Recunoaștem că există legi ale naturii, de exemplu, dar nu recunoaștem că aceste legi există în spațiu și în timp în același mod în care există fenomenele în care se manifestă. Obiective fiind, legile nu sînt obiectuale ori fenomenale. Căci conceptul — cu o vorbă memorabilă a lui Frege — poate fi distins dintr-o combinație, dar nu poate fi rupt de acolo. Cazul judecății, al gîndului, nu este în fond altul, căci lumea și limbajul sînt realități globale, ale căror elemente — stările de fapt — pot fi distinse, dar nu autonomizate ontologic. Să ne oprim însă aici, întrucît Frege nu a sondat adîncimea judecății, joncțiunea pe care o operează gîndul, posibilul conținut de gîndire, între subiect și obiect. — Caracterizarea legilor aritmeticii ca „legi ale legilor naturii", deci legi ale judecăților, este în tonul întregului logicism, și avem aici nu un simplu „mot d'esprit", ci o cale de explorare a conexiunii aritmeticii cu experiența. Afirmația s-ar putea interpreta ca spunînd: analiza enunțurilor aritmeticii duce la enunțuri despre enunțuri, la predicate de predicate, adică la logica de ordin superior.

251 Vezi *Critica rațiunii pure*, ed. rom., p. 49.

252 *Op. cit.*, p. 52.

253 Pentru Frege, propozițiile analitice — în speță, propozițiile logicii — pot fi informative, căci ele extind cunoștințele noastre. Explicația provine dintr-un nou mod de a înțelege definiția conceptului. Imaginea propusă — dezvoltarea plantei din sămînță — sugerează înlocuirea unei viziuni mecaniciste asupra demonstrației și definiției prin alta organică, mai aptă să redea complexitatea demersului rațional.

254 „Estetica transcendentală" pornește de la o premisă evitată de Frege într-un spirit extrem raționalist, anume că „... orice gîndire trebuie să se raporteze în cele din urmă, fie direct (*directe*), fie pe ocolite (*indirecte*), cu ajutorul unor anumite caractere, la intuiții, prin urmare, la noi, la sensibilitate, fiindcă altfel nici un obiect nu ne poate fi dat" (*Critica rațiunii pure*, ed. rom., p. 65).

255 *Op. cit.*

256 Kant și Leibniz sînt filozofii cărora Frege le datorează cele mai fecunde înrîuriri. Însă logicismul fregean înseamnă o întoarcere în planul filozofiei aritmeticii de la Kant la Leibniz.

257 De la analiza conceptelor și instituirea definițiilor sîntem trimiși către instituirea axiomelor și analiza demonstrațiilor. Este sugerată cerința reducerii demonstrațiilor la cîteva procedee elementare, fundamentale ca una din exigențele metodei axiomatice. Explicitarea logicii subiacente condiționează succesul demersului axiomatic.

258 Notînd prin „φ" relația care generează șirul respectiv, avem: $(Un_1(\varphi) \mathbin{\&} S\varphi(m, x) \mathbin{\&} S\varphi(y, x) \rightarrow (S\varphi(m, y) \vee y = m \vee S\varphi(y, m))$. A se vedea notele 190, 192.

259 Acest unic mod de inferență este *modus ponens* sau regula de detașare: dacă atît o implicație cît și antecedentul acesteia sînt demonstrate, atunci și consecventul este demonstrat. În fapt, Frege folosește și regula de substituție, fără s-o mai includă în rîndul modurilor de inferență.

260 Într-un limbaj mai riguros întrebarea lui Hankel — după ce o decantăm, înlăturînd formulările kantiene — este dacă o con-

strucție formală coerentă în genul unei totalități de numere admite o interpretare, un model, așa cum numerele complexe, de exemplu, au putut fi interpretate de Gauss în planul geometric. Acest mod de a pune problema raportînd structura la interpretările posibile datează în logică cel puțin de la Boole și este paralel cu evoluția algebrei abstracte. În lectura lui Frege problema capătă un sens diferit, mai apropiat de acela tradițional, derivat din epistemologia aristotelică. Se presimte deja dificultatea întîmpinată de Frege în a înțelege fecunditatea axiomaticii formale hilbertiene.

261 Obiectivitatea numărului este reafirmată de către Frege într-un spirit care nu este idealist-obiectiv, întrucît nu postulează un domeniu existent autonom, în afara subiectului în același sens în care subzistă lumea exterioară, nu este kantian, întrucît nu presupune intuiția și experiența posibilă, dar este raționalist și înțelege obiectivitatea în sensul gnoseologic de „același pentru toți". Frege împrumută de la Kant ideea obiectivității ca validitate universală, însă la o analiză atentă constatăm că fuziunea raționalismului leibnizian cu acela kantian conferă sintezei fregeene calități pe care sursele nu le aveau, la fel cum un aliaj capătă proprietăți de negăsit la metalele componente. Numerele sînt aceleași pentru toți, din cauză că înseși purtătoarele numerelor, conceptele adică, sînt aceleași pentru toți; or, în raport cu obiectele despre care pot fi predicate, conceptele sînt — cum am văzut — *proprietăți* distinse ca atare, dar în fapt inseparabile de obiecte prin însuși modul lor propriu de a fi. Dar astfel, de la sensul secund al obiectivității am ajuns în preajma sensului prim, ontologic. Kantiană, teoria lui Frege asupra conceptului nu este decît în privința — irelevantă aici — a predicativității conceptului.

262 Frege tinde să confunde problemele genetic-epistemologice cu aspectele psihologice ale cunoașterii umane — reacție la psihologismul logic, dar și la scientismul naturalist al epocii sale.

263 Problema necontradicției se pune la nivelul conceptelor, al propozițiilor și al sistemelor de axiome. Poziția lui Hankel pare să îmbrățișeze și cazul sistemelor axiomatice. Un sistem formal-axi-

omatic poate fi considerat ca definind un concept *sui generis*, și anume conceptul sub care cad toate modelele care satisfac sistemul. În măsura în care răspunsul lui Frege vizează numai conceptul, critica fregeană a teoriilor formale rămîne unilaterală. Dar cîteva observații pătrunzătoare par să indice uneori depășirea cadrului conceptelor izolate, în favoarea conceptualității axiomatice, sistemice. O citire a textului schimbînd acolo unde este cazul „concept" prin „sistem formal" se dovedește în orice caz instructivă.

264 Reciproca presupune a demonstra că unui concept i se subsumează cel puțin un obiect în cazul cînd conceptul este necontradictoriu. Frege îl critică mai jos pe Hankel pentru această eroare. Comentînd întreaga secțiune se poate replica *adversus* Frege: dacă în locul conceptelor considerăm conceptele *sui generis* definite prin sistemul formal al postulatelor, atunci reciproca este valabilă, căci un sistem necontradictoriu admite întotdeauna un model. A pretinde lui Frege sau Hankel claritate deplină în această privință ar fi un anacronism, deoarece lucrurile s-au clarificat abia pe baza teoriei modelelor (Hilbert, Skolem ș.a.). Introducerea numerelor negative în modul în care procedează Hankel (și întreaga tradiție matematică) face uz de existența unui model, garantată de presupusa necontradicție a sistemului de postulate ale operațiilor.

265 Totuși necontradicția înseamnă deja existență la nivelul sistemelor de axiome, și anume *existență a unui model*. Privitor la prima parte a criticii lui Frege -- observația că undeva se poate strecura oricînd o contradicție: ironic și dramatic este faptul că însuși autorul sistemului axiomatizat din *Grundgesetze* nu va înțelege gravitatea obiecției, din ea decurgînd cerința unei demonstrații de necontradicție. Frege nu introducea noi numere, însă introducea alte entități imposibile: extensiunile unor concepte rău definite.

266 Teoriile formale ale numerelor negative, raționale, complexe și infinite sînt criticate de Frege pentru pretenția lor de a *postula implicit existența* unor domenii de entități prin descrierea

proprietăților formale ale entităților respective. Frege este îndreptățit să critice aici absența demonstrației de necontradicție, fără care sistemul ipotetico-deductiv al postulatelor nu are acoperirea necesară introducerii legitime a entităților matematice vizate.

267 Exemplul cu Luna sună curios, dar argumentația este solidă. Presupoziția sa este că o funcție și un concept (de ordinul întîi) trebuie să fie *peste tot definite* (adică definite pe domeniul tuturor obiectelor). Admițînd cerința de mai sus, exemplul nu mai este șocant. Dar presupoziția ca atare este discutabilă, ea suscitînd dificultăți însemnate.

268 Un profan ar putea găsi, eventual, în toate aceste considerații anticiparea unui mod familiar fizicii de a interpreta, de a găsi referințe fizice semnelor matematice. Interpretarea semnului *i* ca interval temporal se asociază în mintea profanului — de ce nu? — cu axa imaginară a timpului în cadrul continuului spațio-temporal einsteinian. Apropierea este, de bună seamă, forțată în litera ei; căci la Frege e vorba de a interpreta entitățile matematice, în timp ce la Einstein, dimpotrivă, punctul de pornire este fenomenul fizic. Dar asemenea aprecieri, oricît de forțate ar fi, sînt utile cel puțin ca gimnastică a minții. — În altă ordine de idei, trebuie spus că Frege s-a dovedit ocazional și un epistemolog pătrunzător, așa cum relevă articolul său „Über das Trägheitsgesetz" din 1891.

269 Amplificată, observația l-ar fi condus pe autor în situația de a se întreba asupra coerenței propriului său sistem formal, ctitorind astfel investigația metamatematică în ceea ce are ea mai specific.

270 Cunoscuta interpretare a numerelor complexe se datorează lui Gauss.

271 Aceasta este tocmai dilema logicismului: sau introducem intuiția ca sursă de cunoaștere — atunci raționalismul riguros al lui Leibniz suferă o corecție severă și strămutarea logicismului pe alte vetre filozofice devine inevitabilă — sau operăm cu de-

finiții ale conceptelor care însă nu garantează existența; cu definiții care sînt tot atîtea „dovezi ontologice" sofistice ale existenței. Soluția lui Frege — așa cum acesta se explică mai jos — rezidă în a defini numerele ca obiecte, nu concepte (punînd astfel în joc unul din principiile directoare enunțate în Introducere), în a disocia obiectul și definiția logică de reprezentarea asociată obiectului logic (intră atunci în joc un alt principiu director); și în a utiliza definițiile prin abstracție, pornind de la judecăți de recognitie (aplicînd al treilea principiu fundamental).

272 Aici, ținta criticii lui Frege nu este numai psihologismul, ci și sursa lui primă, doctrina kantiană a cunoașterii. Întrebarea este dacă logicismul nu dispune aici prea repede de un adversar redutabil. Mai multe disocieri se cer făcute: 1) disocierea între intuiția și reprezentarea obiectului: cînd cerem ca obiectul să fie dat în intuiție nu ridicăm pretenția fuziunii sale cu cîmpul subiectiv al reprezentărilor; 2) disocierea întru dat a actualului de potențial, disociere din care țîșnește tocmai ideea de construcție, mai precis de constructibilitate. Spre a vorbi despre $1\,000^{(1000^{1000})}$ — ca să luăm exemplul adus de Frege — intuiția nu are nevoie de prezentarea (sau reprezentarea) a tot atîtor obiecte, ci de posibilitatea unor construcții succesive care în cele din urmă conduc la obiectul respectiv. Intuiție și constructibilitate sînt asociate în gnoseologia kantiană, dacă nu în litera ei, cel puțin în plauzibila tălmăcire contemporană, care constă în a asimila intuirea unor obiecte posibile de experiență cu actul de înțelegere a procesului de construcție. Intuiția devine deci un act intelectual care împărtășește cu aprehendarea sensibilă aparența nemijlocirii, însă — ca orice construcție — mai presupune o spațio-temporalitate abstractă, o structură logică izolabilă. Pozițiile care se opun nu sînt ireconciliabile decît de la un punct încolo; ele colaborează pe o porțiune a drumului cunoașterii matematice. Atunci deci cînd construcția logicistă a numărului natural își urmează cursul știut, conturînd prin structura ei definiția genetică a mulțimii numerelor naturale, filozofia kantiană a matematicii sau intuiționismul contemporan pot pretinde — și nu fără temei — că aici avem numai discursivizarea

unei intuiții a cărei natură este discutabilă, dar a cărei existenț rămîne certă. Divergența se reaprinde dincolo de acest punc fiindcă în timp ce una din abordări rămîne la infinitul potenția cealaltă îl absoarbe în mulțimea actual infinită a entităților c. într-un dat, anterior cunoașterii matematice.

273 În „Über formale Theorien der Arithmetik" (articol di 1885), Frege explică pe larg distincția dintre cele două accepți ale termenului „teorie formală". El scrie: „Sub denumirea de «teo rie formală» voi considera aici două modalități de abordare, din tre care pe prima o accept, în timp ce pe cealaltă urmăresc s-c infirm. Prima susține că toate propozițiile aritmetice pot fi derivate pur logic numai din definiții iar ca atare ele și trebuie să fie derivate astfel..." A doua concepție care poate fi desemnată drept teorie formală „afirmă că semnele numerelor 1/2, 1/3, numărul π ș.a.m.d. sînt semne goale". Potrivit acestei concepții — explică Frege — numerele sînt înseși semnele. O variantă a „teoriei formale" de acest gen este afirmația după care „numerele există atunci cînd putem calcula cu ele" (în *Kleine Schriften*, 1967, pp. 103, 105, 110).

274 Profesiunea de credință a raționalismului consecvent este condensată aici într-un aforism care luat în sine parafrazează nu doar „o afirmație bine cunoscută" — cum spune Frege —, ci o întreagă declarație de intenții. Stă în natura demersului filozofic tendința de a-și depăși cadrul inițial, rîvnind atotcuprindere, adică nimic mai puțin decît absolutul. Așa și raționalismul: punctul de pornire este rațiunea care se înțelege pe sine ca excelentă, ca mijloc suveran al cunoașterii. Însă raționalismul tinde să transforme rațiunea în factor ontologic, convertind procesul prin care se ia pe sine ca obiect în mirajul prin care ia obiectul ca pe sinele său. A vedea în rațiune numai un mijloc de cunoaștere înseamnă a face din ea un accident care lasă neexplicat modul esențial de a fi (încă) necodificabil al rațiunii umane: temeritate, spirit explorator, proiect, fantezie. Întrebarea rămîne totuși dacă raționalitatea indubitabilă a lumii — matematica ei, spre exemplu — o privim ca pe produsul rațiunii, expresia ei fenomenală, sau ca

pe suportul ei. Răspunsul nu poate fi atît de simplu ca întrebarea, dar el pornește în orice caz de la precizarea că raționalitatea subiacentă lumii fără om stă întru început față de rațiune și față de construcțiile ei splendide într-un raport omolog celui în care stau undele lumii față de culorile omului și față de văz ca produs al evoluției multietajate; raport *omolog* tocmai, căci omologia nu este analogie, rațiunea nu se mărginește a face oficiile unui mecanism traductor sofisticat al raționalității obiective; strădania sa este de a modela, de a *unelti*, orientînd *lucrarea lumii* după criterii dictate de praxis, semioză, comunicare. A înțelege deci maxima „obiectul propriu al rațiunii este rațiunea“ ca derivînd din convingerea că „obiectul propriu al omului este omul“ înseamnă a face dreptate raționalismului, corectînd o inconsecvență născută din spirit rectiliniu. — Însă aceste observații ne abat de la gîndul lui Frege. Nu a stat în intenția lui să contureze o doctrină raționalistă globală, nici să hipostazieze rațiunea în maniera unui realism platonic; tot așa, nimic mai opus adevărului istoric decît imaginea unui doctrinar reluînd în contul matematicii ontologia hegeliană. Enunțul lui Frege nu este de natură ontologică, ci epistemologică, așa cum lămurește el însuși în fraza imediat următoare. Sursa aforismului fregean — așa cum un șir de exegeți au ținut să precizeze, în deplin consens — este de găsit la Kant. Numai luîndu-se pe sine ca obiect — și anume ca obiect de critică — rațiunea pură ajunge să dea răspuns întrebărilor fundamentale ale lumii, răspuns constînd în bună parte în clarificarea sensului, importanței și locului lor, ca și în strămutarea lor de pe terenul ontologiei pe acela al epistemologiei, axiologiei ș.a.m.d. Analog, sugerează Frege, aritmetica este obiect al rațiunii. — Ca atare, aforismul rămîne un test al rădăcinilor raționaliste ale concepției lui Frege, fără să aducă un element cu adevărat nou față de precizările anterioare.

275 Distincția, de ordin logico-gramatical, era cunoscută în filozofia tradițională. Primul capitol al *Categoriilor* lui Aristotel introduce patru tipuri de entități după criteriile de a fi sau a nu fi într-un subiect și de a se putea enunța sau nu despre un subiect.

Numărul individual, fiind desemnat ca nume propriu şi nu ca adjectiv, este un obiect abstract, un subiect de predicaţie. Dificultăţile legate de sistematizarea ontologică a entităţilor sînt considerabile, îndeosebi dacă nu recurgem la ierarhizarea entităţilor după tipuri, ceea ce — aproximativ — ar corespunde treptelor succesive de abstractizare. Frege a evitat aici angajarea în analize mai complicate, preferînd să rămînă pe terenul ferm al logicii, însă în „Funcţie şi obiect" şi „Despre concept şi obiect" el introduce distincţia dintre entităţi saturate şi nesaturate, pornind de la distincţia similară în planul expresiilor; analiza sa logică reînnoadă astfel firul cu tradiţia filozofică.

276 Am tradus „Gleichung" prin „egalitate" şi „Gleichheit" prin „identitate"; „Gleichung" vizează de fapt *expresia* unei relaţii de egalitate, adică „ecuaţia".

277 Frege va explica în scrierile ulterioare — începînd cu „Funcţie şi concept" — înţelesul intuitiv al expresiei „extensiune a conceptului" („sferă") prin conceptul de „parcurs valoric" (*Werthverlauf*). Conceptele sub care cad exact aceleaşi obiecte au acelaşi parcurs valoric. — Afirmaţia lui Frege după care apelul la extensiunea conceptului nu are importanţă decisivă poate fi interpretată în două feluri. În primul sens, am fi ispitiţi să vorbim despre clase (mulţimi) oarecare, independent de concept, la modul lui Cantor; este totuşi limpede că Frege găsea absolut inacceptabil apelul la clase fără concepte. De aceea, în al doilea sens, sîntem autorizaţi a presupune că Frege are în vedere apelul direct la concepte, aşa cum specifică explicit în nota de la finele § 68. Pînă la urmă, Frege nu s-a putut dispensa de oficiul parcursurilor valorice, al extensiunilor de concepte. În *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege postulează fără restricţii — şi cu consecinţa dezastruoasă a paradoxului russellian — că două funcţii au aceleaşi parcursuri valorice dacă şi numai dacă iau aceleaşi valori pentru aceleaşi argumente. Simplificarea aparatului formal prin adoptarea unui „limbaj extensional" — cum obişnuim a spune astăzi — nu înseamnă că primatul conceptului asupra extensi-

unii sale este abolit. Frege rămîne pînă la urmă, în planul intențiilor teoretice, un comprehensivist.

278 A se vedea nota 264.

279 Deznodămîntul tentativei îndrăznețe a lui Frege de a elucida enigma numărului este — în ordinea spiritului — tragic: logicismul viza transcenderea unei limite care nu a cedat. Ținta finală nu a fost atinsă, însă mijloacele și-au afirmat dreptul la o viață autonomă. Frege personal a resimțit cu acuitate proporțiile înfrîngerii. Spre sfîrșitul vieții, el fixează cu luciditate situația, retranșîndu-se pe noi poziții fundaționale. Rîndurile sale sînt epilogul cel mai potrivit la o lectură comprehensivă și detașată a *Fundamentelor aritmeticii*: „Sforțările mele de a aduce lumină în chestiunile legate de cuvîntul «număr», legate de numeralele disparate și de simbolurile numerice par a se fi încheiat printr-un eșec deplin. Și totuși, aceste sforțări nu au fost cu totul zadarnice. Tocmai prin acest eșec ele pot conduce la cunoaștere. Dificultățile suscitate de aceste investigații sînt nu o dată subapreciate..." „... Cu cît am meditat mai mult... cu atît m-am convins mai mult că aritmetica și geometria au crescut pe același fundament, și anume pe acela al geometriei, încît întreaga matematică este propriu-zis geometrie" (*Nachgelassene Schriften*, pp. 285, 297). Sursa geometrică a cunoașterii — precizează Frege — colaborează cu sursa logică pentru a ne da matematica în unitatea ei (*ibid*., pp. 298–299).

Astfel, după o călătorie de 40 de ani în deșert, proiectul de unificare a logicii cu aritmetica sub sceptrul analiticității se frînge sub propria sa povară, elementul sintetic *a priori* reapărînd în prim-plan.

TABEL CRONOLOGIC

1848 La 8 noiembrie 1848 se naşte la Wismar, Friedrich Ludwig Gottlob Frege, fiul lui Karl Alexander Frege (1809–1866), director de şcoală, şi al Augustei Frege, născută Biallo-blotzky, profesoară.
Moare Bernard Bolzano, supranumit „Leibniz al Boemiei“, logicianul cel mai important din prima jumătate a secolului trecut, precursor al semanticii logice.

1854 George Boole (1815–1864), după ce publicase în 1847 *The Mathematical Analysis of Logic*, dă acum la iveală *An Investigation into the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.*

1859 Augustus de Morgan redactează memoriul „On the Syllogism IV and on the Logic of Relations“ (publicat în 1864), dezvoltînd o logică a relaţiilor. Darwin publică *Originea speciilor*, iar Marx *Contribuţii la critica economiei politice*. Se nasc E. Husserl şi H. Bergson.

1864–1869 Tînărul Frege urmează cursurile gimnaziului din Wismar, pe care îl termină în 1869; se înscrie la Universitatea din Jena.
În 1864, Jevons introduce disjuncţia neexclusivă în algebra booleană. În 1867 K. Marx publică primul volum din *Capitalul.*
În acelaşi an G. F. B. Riemann expune bazele geometriei sale neeuclidiene în *Über die Hypothesen welche der Geometrie*

zu Grunde liegen; în 1869, Jevons construieşte o maşină logică pentru efectuarea mecanică a inferenţelor studiate de Boole.

1869–1870 Frege studiază, la Universitatea din Jena, chimia, filozofia, matematica.
În America, Ch. S. Peirce iniţiază primele sale investigaţii asupra logicii relaţiilor.

1871–1873 La Universitatea din Göttingen, Frege studiază filozofia religiei (cu Hermann Lotze), fizica şi îndeosebi matematica.
În 1872 J. W. R. Dedekind (1831–1916) publică *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, o teorie a numerelor reale care resuscită teoria rapoartelor a lui Eudoxus în versiunea „tăieturii Dedekind". Se naşte Bertrand Russell.

1873 Frege termină Universitatea din Göttingen şi susţine teza *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, obţinînd la 12 noiembrie titlul de doctor în filozofie. Pregăteşte lucrarea sa de abilitare.

1874 Prezintă ca *Habilitationsschrift* lucrarea *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*. În luna mai este admis ca *Privatdozent* (lector) la Facultatea de Matematică a Universităţii din Jena; întreaga sa carieră universitară, timp de 44 ani, va fi legată de acest loc.

1874–1878 Frege recenzează trei cărţi de matematică şi publică un articol; pregăteşte *Begriffsschrift*. Se conturează tot mai clar proiectul unei fundamentări riguroase a aritmeticii pe baza logicii.
În 1877 Ernst Schröder publică *Der Operationskreis des Logikkalküls* iar Mc. Call, *The Calculus of Equivalent Statements*, o versiune a logicii propoziţiilor.

1879 Apare la Halle *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, o pia-

tră de hotar în istoria logicii. Frege insuflă logicii noi conținuturi, metode și obiective; fundează axiomatic logica propozițiilor, construiește logica predicatelor, indică mijloacele de formalizare a propozițiilor matematice, construiește primul sistem formal, definește concepte aritmetice prin idei logice, formulează programul logicist. În același an, Frege promovează în ierarhia universitară la poziția de *ausserordentlicher Professor*.

1879–1883 Revoluționarea logicii de către Frege trece aproape neobservată; *Begriffsschrift* este primită rece, ignorată sau criticată. Dezamăgit, Frege scrie cîteva articole în apărarea „Scrierii conceptuale". Apar astfel „Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift" în 1882 și „Über den Zweck der Begriffsschrift" în 1883. Un articol de amploare — „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift" —, precum și „Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift" îi sînt refuzate de cîteva reviste filozofice și matematice; manuscrisele vor fi editate abia în 1967. În aceeași perioadă, Frege pregătește a doua sa carte, *Die Grundlagen der Arithmetik*.
În 1880, în timp ce mai apar multe *Logici* tributare paradigmei tradiționale, Ch. S. Peirce elaborează memoriile *On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation* și *On a Boolean Algebra with one Constant*. În 1881 apare *Symbolic Logic* a lui J. Venn. În 1883 H. O. Mitchell și apoi Ch. S. Peirce utilizează deja „cuantorii" (termenul îi aparține lui Peirce și va fi încetățenit în logică, dar Frege introdusese procedeul cuantificării încă în 1879, în *Begriffsschrift*). În 1883 Georg Cantor (1845–1918) publică *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*; cartea înmănunchează mai multe articole publicate anterior. Teoria mulțimilor și a numerelor transfinite creată de Cantor va fi salutată de Frege în anul următor ca un pas înainte în știință.

1884 Frege publică *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine Logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der*

Zahl. A doua carte a lui Frege marchează o dată crucială în filozofia logicii şi a matematicii. Definiţia logicistă a numărului va face carieră; preluată de la Cantor, Frege sau Russell, sau găsită independent, ea va apărea în repetate rînduri în operele altor matematicieni. — La apariţie, cartea lui Frege stîrneşte prea puţine ecouri.

1885 Frege comunică şi publică *Über formale Theorien der Arithmetik*.

1886–1890 Frege lucrează intens la a treia sa carte, dezvoltînd şi modificînd ideile sale logico-filozofice.
În 1887 *Was sind und was sollen die Zahlen?* de R. Dedekind abordează în spirit logicist teoria mulţimilor şi fundarea aritmeticii şi analizei. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889) de Peano enunţă axiomele aritmeticii (anticipate de Dedekind în anul precedent, traducerea lor în limbaj logic se poate găsi încă în 1884 la Frege). În 1890 apare primul volum din *Vorlesungen über die Algebra der Logik* ale lui E. Schröder, monumentala monografie care sintetizează algebra logicii; celelalte volume vor apărea pînă în 1905.

1891 Începutul unui deceniu fecund în care văd lumina tiparului scrieri fregeene importante; apar articolele „Über das Trägheitsgesetz" şi „Funktion und Begriff".
E Husserl publică prima sa carte, *Philosophie der Arithmetik*, unde discută şi concepţia lui Frege.

1892 Apare „Über Sinn und Bedeutung", contribuţie epocală la elaborarea semanticii logice. Un alt articol care vede lumina tiparului în acelaşi an este „Über Begriff und Gegenstand"; totodată Frege recenzează *Zur Lehre vom Transfiniten* de Georg Cantor.

1893 La Jena apare primul volum din *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. În a treia carte, Frege îşi propune să dezvolte pas cu pas, cu maximă rigoare, programul logicist, să definească aşadar ideile aritmeticii şi

să deducă legile ei în cadrul sistemului formal al logicii. La apariție, cartea nu stîrnește ecouri largi și vor trebui să treacă șapte decenii pînă la reeditarea ei integrală.

1894 Frege recenzează *Philosophie der Arithmetik* a lui E. Husserl, în care ideile fregeene din *Fundamentele aritmeticii* (1884) erau puse în discuție; recenzia marchează începutul influenței fecunde a lui Frege asupra lui Husserl.
În *Notations de logique mathématique* (urmate între 1895 și 1908 de cinci versiuni ale unui *Formulaire de mathématiques*), Giuseppe Peano combină logica matematică și demersul axiomatic în tentativa fundării matematicii.

1895 Frege publică articolul „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*“ și „Le nombre entier“.
Cantor descoperă o antinomie în teoria mulțimilor; doi ani mai tîrziu, Burali-Forti o va descoperi în mod independent și o va publica.

1896 Frege confruntă ideografia lui Peano cu propria lui „scriere conceptuală“ și semnalează lacune logice ale ideografiei în „Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene“. O scrisoare către G. Peano, datată „Jena, 29 septembrie 1896“, apare în *Rivista di Matematica* abia în 1899. — Este promovat în ierarhia universitară la rangul de Profesor onorific.

1897–1901 Ani de tăcere publicistică, întreruptă numai în 1899, cînd Frege publică o broșură polemică acerbă *Über die Zahlen des Herrn H. Schubert*; totodată, ani de lucru intens, așa cum atestă manuscrisele.
A. N. Whitehead publică în 1898 *Universal Algebra*.
În 1899 Cantor descoperă paradoxul care îi poartă numele; David Hilbert publică *Die Grundlagen der Geometrie*, prima axiomatizare pe deplin riguroasă a geometriei euclidiene, în spiritul axiomaticii formale. Bertrand Russell publică *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*

(1900), iar Couturat, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits* (1901). În 1900–1901 apar *Logische Untersuchungen* în două volume de E. Husserl.

1902 An de răscruce pentru Frege; Bertrand Russell îi scrie, comunicînd descoperirea unui paradox în sistemul din *Grundgesetze*; Frege îi răspunde la 22 iunie. În octombrie al aceluiaşi an Frege scrie un *Appendix* pentru volumul II al cărţii sale în care prezintă paradoxul lui Russell şi recunoaşte că sistemul logic al aritmeticii a fost zdruncinat din temelii, constatînd totodată caracterul general al crizei din fundamente.

1903 Apare la Jena volumul II din *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*. În acelaşi an, publică primele două articole din ciclul *Über die Grundlagen der Geometrie*, discuţie asupra axiomaticii formale hilbertiene. Russell publică *The Principles of Mathematics*, carte în care prezintă pe larg concepţiile logico-aritmetice ale lui Frege, problema paradoxelor, soluţia lui Frege etc.

1904–1917 În ultimii ani ai carierei sale universitare, Frege publică tot mai puţin şi discontinuu: „Was ist eine Funktion?" (1904), trei articole din ciclul *Über die Grundlagen der Geometrie* (1906); polemizează cu formalistul J. Thomae (1906–1908); în *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* apar în 1912 observaţiile sale la articolul lui P. Jourdain, „The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics"; între 1915 şi 1917, revista *The Monist* publică în traducere Prefaţa, Introducerea şi primele şapte secţiuni din *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I.
Viaţa personală a lui Frege este marcată de drame. Copiii săi muriseră mai demult la o vîrstă fragedă şi soţii Frege adoptaseră în 1902 un copil, Alfred, pe care Frege îl va creşte singur, întrucît soţia sa moare în 1905.
În 1907 primeşte titlul onorific de *Hofrat*. Predă cursuri de matematici şi fundamente expunînd bazele logicii, propriul său sistem formal. Corespondează cu Russell, Hilbert,

Couturat şi cu alte personalităţi proeminente. Îl vizitează Wittgenstein; cursurile sale sînt audiate de către Rudolf Carnap.

În luptă cu decepţia şi oboseala care se instalează, Frege nu încetează să mediteze asupra bazelor aritmeticii şi filozofiei logicii. Manuscrisele editate postum arată că Frege lucra la o expunere sistematică a logicii sale. În primăvara anului 1914 redactează amplul fragment *Logik in der Mathematik*.

În aceşti ani, criza fundamentelor matematicii devine tot mai vizibilă. Russell, Zermelo, Hilbert şi Brouwer se angajează pe căi diferite în căutarea unei soluţii. La al III-lea Congres Internaţional de Matematică de la Heidelberg, în 1904, Hilbert conferenţiază „Despre fundamentele logicii şi aritmeticii", preconizînd fundarea riguroasă a conceptului de număr prin axiomatizare şi demonstraţii de consistenţă. În 1905 Jules Richard descoperă un nou paradox; Poincaré — în polemică cu Russell — exultă: logistica nu este numai eronată, ea generează paradoxuri! În 1906, Russell sugerează teoria „fără clase" — încercare de soluţionare a paradoxelor, iar în 1908 formulează prima versiune a teoriei tipurilor în articolul „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types". Tot în 1908 L. E. Brouwer publică un articol asupra incertitudinii principiilor logicii, preconizînd ca terţiul exclus să nu fie acceptat ca temei al raţionamentului matematic iar E. Zermelo dă prima axiomatizare a teoriei mulţimilor. În 1910, A. N. Whitehead şi B. Russell publică primul volum al monumentalei lor opere în trei volume (apărută pînă în 1913) *Principia Mathematica*, în care logica fregeană, combinată cu teoria tipurilor, este pusă la baza întregii matematici; *Principia Mathematica* impune paradigma logicii simbolice. În 1914 moare Ch. S. Peirce. L. Löwenheim publică primele cercetări metalogice asupra logicii predicatelor (1915). Hilbert şi un grup de matematicieni lucrează în vederea elaborării *metamatematicii* (*teoria demonstraţiilor*).

1918 Frege se pensionează și se retrage la Bad Kleinen, unde va petrece ultimii ani de viață. Publică articolele „Der Gedanke: Eine Logische Untersuchung" și „Die Verneinung: Eine Logische Untersuchung". Moare Georg Cantor.

1919–1925 În amurgul vieții sale Frege nu mai publică decît a treia parte din ciclul *Logische Untersuchungen*, și anume *Gedankengefüge*. În 1924–1925 abandonează concepția logicistă, constatînd eșecul ei total și schițează proiectul unei fundări geometrice a conceptului de număr (fragmentele postume *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften*; *Zahlen und Arithmetik*; *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik*).
Cercetări metalogice asupra calculului propozițiilor și predicatelor sînt întreprinse de către Post, Skolem, Bernays ș.a. Se cristalizează noțiunile metalogice de consistență și completitudine, tehnicile de demonstrare a independenței axiomelor, a consistenței etc. E Post și J. Łukasiewicz ajung pe căi diferite la logicile polivalente. Th. Skolem descoperă limite ale mijloacelor de expresie ale logicii predicatelor. L. Wittgenstein publică *Tractatus logico-philosophicus* (1921). Începuturile Cercului de la Viena.
26 iulie 1925. Frege încetează din viață la Bad Kleinen. Moartea lui Frege trece aproape neobservată.

1926–2000 Renaștere — mai întîi lentă, apoi tot mai rapidă — a interesului pentru opera lui Frege pe fundalul interesului tot mai mare suscitat de dezvoltarea vertiginoasă a cercetărilor logice și metamatematice. Manuscrisele, întregul fond științific fregean, sînt preluate de Universitatea din Münster, unde Heinrich Scholz este profesor.
În 1934 se reeditează *Fundamentele aritmeticii*. Cartea e tradusă în italiană în 1948 și în engleză în 1950 (ediția bilingvă a lui J. Austin).
În 1935, la Congresul internațional de filozofie științifică de la Paris, H. Scholz și F. Bachmann prezintă comunicarea „Der wissenschaftliche Nachlass von G. Frege".

Din păcate, o parte din manuscrisele fondului fregean pier în timpul războiului, într-un incendiu cauzat de un bombardament. Postumele vor fi editate mult mai tîrziu pe baza unor còpii dactilografiate.

În 1952 P. Geach și M. Black traduc și editează *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Începînd din deceniul șapte reeditările și traducerile se succedă într-un ritm tot mai susținut; *Begriffsschrift* apare din nou, fiind tradus totodată în engleză în două versiuni diferite; se reeditează toate celelalte scrieri antume ale lui Frege. În fine, în 1969 și 1976 apar cele două volume ale ediției *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*; reeditarea integrală a operei lui Frege poate fi considerată împlinită. Alături de articole care discută și popularizează elementele disparate ale concepției fregeene, sînt elaborate primele sinteze mature, monografiile de anvergură. Frege este integrat definitiv în circuitul marilor valori ale logicii și filozofiei.

CUPRINS